

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 8 februarie 2025
Clasa a X - a

Barem de corectare și notare

1. a) Dacă $a = 0,01$; $b = 0,1$; $c = 10$ obținem **1p**

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a = \log_{0,01} 0,1 + \log_{0,1} 10 + \log_{10} 0,01 = \frac{1}{2} - 1 - 2 < 3 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Observație: Exemplul poate fi abordat și pe caz mai general, fixând de exemplu c și căutând a și b ca puteri ale lui c .

Astfel dacă $a = c^k$ și $b = c^p$, atunci $\log_a b + \log_b c + \log_c a = \frac{p}{k} + \frac{1}{p} + k$ și se pot

căuta $k, p \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ cu proprietatea că $\frac{p}{k} + \frac{1}{p} + k < 3$.

Se va acorda punctaj maxim pentru orice exemplu care satisface inegalitatea. Verificarea este necesară.

- b) Deoarece $a, b, c > 1$, rezultă $\log_a b, \log_b c, \log_c a > 0$ **1p**

Conform inegalității mediilor, are loc

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} = 3 \cdot 1 = 3, \text{ egalitatea având loc}$$

dacă și numai dacă $\log_a b = \log_b c = \log_c a$ **2p**

$$\text{Dacă } \log_a b = \log_b c = \log_c a, \text{ atunci } (\log_a b)^3 = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1.$$

Rezultă $\log_a b = 1$ și în final $a = b$. Analog $b = c$.

Așadar egalitatea de la medii nu poate avea loc **2p**

2. Pentru $y = 0$, relația din problemă conduce la $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și deci $f = g$.

Relația din ipoteză devine $f(x + yf(x)) = (y+1)f(x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. (*) **1p**

a) Fie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ (evident și $f(x) = c$).

Egalitatea din enunț devine $f(x + yc) = (y+1) \cdot c$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Pentru $x = 0$, $y = 1$, obținem $f(c) = 2c$ **1p**

Pentru $x = c$, $y = 0$, obținem $f(c) = c$. Din $2c = c$, rezultă $c = 0$ **1p**

b) Dacă f este funcția identic nulă, aceasta verifică (*). **1p**

Dacă f nu este funcția identic nulă, atunci există $a \in \mathbb{R}$ cu $f(a) \neq 0$. Pentru $x = a$ obținem $f(a + yf(a)) = (y+1)f(a)$, $\forall y \in \mathbb{R}$ **1p**

Notând $t = a + yf(a)$ egalitatea anterioară se scrie $f(t) = \left(\frac{t-a}{f(a)} + 1 \right) f(a)$.

Deoarece t parcurge toată mulțimea numerelor reale (funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $h(y) = a + yf(a)$ este surjectivă), obținem $f(t) = t - a + f(a)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Așadar $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \lambda$, unde λ este o constantă reală.

Pentru orice λ , funcția f verifică egalitatea (*). **1p**

Rezultă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ sau $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ **1p**

3. Notăm $\sqrt[3]{27+x} = a$ și $\sqrt[3]{27-x} = b$. Evident $a^3 + b^3 = 54$.

$$\frac{3(x^2+2)}{\sqrt{x^2+1}} = 3 \left(\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) \geq 3 \cdot 2 = 6, \text{ rezultând } a+b \geq 6 \dots\dots\dots 2p$$

Metoda 1:

$$4(a^3+b^3) - (a+b)^3 = 3(a-b)^2(a+b) \geq 0, \text{ ceea ce conduce la}$$

$$(a+b)^3 \leq 4(a^3+b^3) = 4 \cdot 54 = 216 \text{ și în continuare } a+b \leq 6 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Deoarece } a+b=6 \text{ rezultă } \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \dots\dots\dots 2p$$

$$x=0 \text{ este soluție.} \dots\dots\dots 1p$$

Metoda 2:

$$54 = a^3 + b^3 = (a+b) \underbrace{(a^2 - ab + b^2)}_{\geq 0} \geq 6(a^2 - ab + b^2) = 6((a+b)^2 - 3ab), \text{ ceea ce}$$

$$\text{conduce la } (a+b)^2 - 3ab \leq 9 \text{ și în continuare } ab \geq \frac{(a+b)^2 - 9}{3} \geq \frac{6^2 - 9}{3} = 9. \dots\dots\dots 2p$$

$$a \text{ și } b \text{ fiind pozitive, are loc } 54 = a^3 + b^3 \geq 2 \cdot \sqrt{a^3 \cdot b^3} \geq 2 \cdot \sqrt{9^3} = 54 \Rightarrow a=b. \dots\dots\dots 2p$$

$$x=0 \text{ este soluție.} \dots\dots\dots 1p$$

4. $a \cdot z^6 + b \cdot zu + c = b \cdot z^6 + c \cdot zu + a = c \cdot z^6 + a \cdot zu + b$

„ \Rightarrow ” Prima egalitate devine $a + b \cdot zu + c = b + c \cdot zu + a$.

Rezultă $(b-c) \cdot zu = b-c$ și de aici $zu = 1$.

$$\text{Deoarece } |z| = 1, \text{ se obține } u = \frac{1}{z} = \bar{z}. \dots\dots\dots 2p$$

$$„\Leftarrow” \text{ Egalitățile devin } a \cdot z^6 + b \cdot |z|^2 + c = b \cdot z^6 + c \cdot |z|^2 + a = c \cdot z^6 + a \cdot |z|^2 + b.$$

$$\text{Se obține imediat } z^6 \in \mathbb{R}. \text{ Notând } |z|^2 = t > 0, \text{ deducem că } z^6 \in \{-t^3, t^3\}. \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dacă } z^6 = -t^3, \text{ egalitățile conduc la } \begin{cases} -a \cdot t^3 + b \cdot t + c = -b \cdot t^3 + c \cdot t + a \\ -b \cdot t^3 + c \cdot t + a = -c \cdot t^3 + a \cdot t + b \end{cases}.$$

$$\text{Sistemul este echivalent cu } \begin{cases} (a-b) \cdot t^3 - (b-c) \cdot t = c-a \mid \cdot (b-c) \\ (b-c) \cdot t^3 - (c-a) \cdot t = a-b \mid \cdot (a-b) \end{cases}.$$

Scăzând ecuațiile obținute, rezultă

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \cdot t = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \text{ și apoi } t=1, \text{ valoare care înlocuită în sistem conduce la } a=b=c, \text{ ceea ce nu convine.} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{În mod similar, dacă } z^6 = t^3, \text{ se obține } t=1, \text{ rezultând } z^6 = t^3 = 1. \dots\dots\dots 2p$$