

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 8 februarie 2025
Clasa a VI - a

Barem de corectare și notare

1. Aflați numerele prime p, q, r pentru care este adevărată relația $p^4 q^3 + p^3 r = 2024$.

(S:E23.215, 9/2024)

Soluție:

$p^3(pq^3 + r) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23 \Rightarrow p = 2$ 2p
 $\Rightarrow 2q^3 + r = 253 \Rightarrow 2q^3 < 253 \Rightarrow q < 6$, q prim, deci $q \in \{2, 3, 5\}$ 1p
i) $q = 2 \Rightarrow 16 + r = 253 \Rightarrow r = 237 : 3$ nu e prim 1p
ii) $q = 3 \Rightarrow 54 + r = 253 \Rightarrow r = 199$ prim 1p
iii) $q = 5 \Rightarrow 250 + r = 253 \Rightarrow r = 3$ prim 1p
Finalizare $p = 2, q = 3, r = 199$; $p = 2, q = 5, r = 3$ 1p

2. a. Aflați numărul divizorilor naturali ai numerelor 25 și 48;
b. Determinați cel mai mic număr de patru cifre care are exact trei divizori;
c. Arătați că oricum am alege trei numere de patru cifre care au exact trei divizori, există două a căror diferență se divide cu 5.

Soluție:

a) $25 = 5^2 \Rightarrow$ numărul divizorilor lui 25 este 3
 $48 = 2^4 \cdot 3 \Rightarrow$ numărul divizorilor lui 48 este 10 2p
b) numerele care au exact trei divizori sunt pătratele perfecte de numere prime
 $37^2 = 1396$ este cel mai mic număr de patru cifre care are exact trei divizori 2p
c)
Numerele prime mai mari decât 5 au ultima cifră 1, 3, 7 sau 9 1p
iar pătratele lor au ultima cifră 1 sau 9 1p
 \Rightarrow oricum am alege două din cele trei, ele au aceeași ultimă cifră și
diferența lor este divizibilă cu 5. 1p

3. Se dau semidreptele $(OA), (OB), (OC), (OD), (OE)$ și (OF) , în această ordine, toate situate în același semiplan, cu $m(\angle AOF) \leq 180^\circ$, $m(\angle BOC) = 10 \cdot m(\angle AOB)$,

$$m(\angle DOE) = 21 \cdot m(\angle COD), \text{ și } m(\angle AOF) = 45 \cdot m(\angle EOF).$$

Dacă măsurile unghiurilor formate sunt exprimate în grade prin numere naturale nenule, iar măsurile unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle COD$ sunt numere prime, aflați măsura unghiului $\angle AOD$.

Soluție:

Notăm $m(\angle AOB) = n, m(\angle COD) = m, m(\angle EOF) = p$,
unde $n, m, p \in \mathbb{N}^*$, cu n, m prime și $m(\angle AOD) = 11n + m$ 1p
Cum $m(\angle AOF) \leq 180^\circ$, avem $45p \leq 180 \Rightarrow p \leq 4 \Rightarrow p \in \{1, 2, 3, 4\}$ 1p
 $11n + 22m + p = 45p \Rightarrow 11n + 22m = 44p \Rightarrow n + 2m = 4p$ 1p
Numărul prim n trebuie să fie par, deci $n = 2$ 1p
 $p = 2 \Rightarrow 2 + 2m = 8$, deci $m = 3$ și $m(\angle AOD) = 25^\circ$ 1p
 $p = 3 \Rightarrow 2 + 2m = 12$, deci $m = 5$ și $m(\angle AOD) = 27^\circ$ 1p
 $p = 4 \Rightarrow 2 + 2m = 16$, deci $m = 7$ și $m(\angle AOD) = 29^\circ$ 1p

4. Se consideră mulțimile A și B , cu elementele numere naturale, care îndeplinesc simultan următoarele patru condiții:

- Elementele mulțimii A sunt 13 numere consecutive;
- Elementele mulțimii B sunt 12 numere consecutive;
- Elementele mulțimii $A \cup B$ sunt 15 numere consecutive;
- Suma elementelor mulțimii A este egală cu suma elementelor mulțimii B .
 - Arătați că mulțimile A și B au 10 elemente comune;
 - Determinați mulțimile A și B .

Soluție:

i) $\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cup B)$ **1p**

$\text{card}(A \cap B) = 10$, numere naturale consecutive **1p**

ii) Fie $A \cap B = \{n, n+1, n+2, \dots, n+9\}, n \in \mathbb{N}$

$\text{card}(A - B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B) = 3$

$\text{card}(B - A) = \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) = 2 \Rightarrow$ **1p**

Cazul I

$A - B = \{n-3, n-2, n-1\}, B - A = \{n+10, n+11\}$

Din **d.** se obține

$(n-3) + (n-2) + (n-1) = (n+10) + (n+11) \Rightarrow n = 27$ **2p**

$A = \{24, 25, 26, \dots, 36\}$

$B = \{27, 28, 29, \dots, 38\}$ **1p**

Cazul II

$A - B = \{n+10, n+11, n+12\}, B - A = \{n-2, n-1\}$

Din **d.** se obține

$(n+10) + (n+11) + (n+12) = (n-1) + (n-2) \Rightarrow n+36=0 \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$... **1p**