

## Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

## Etapa Locală

Maramureș – 8 februarie 2025

Clasa a X - a

Secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

## Barem de corectare și notare

1. Arată că  $\sqrt{x+k} < \frac{x+k+1}{2}$  ..... 1 p

Avem că  $x+k < \frac{(x+k+1)^2}{4}$  ..... 1 p

$4(x+k) < (x+k)^2 + 2(x+k) + 1$  ..... 1 p

Adică  $0 < (x+k)^2 - 2(x+k) + 1$  ..... 1 p

de unde rezultă că  $(x+k-1)^2 > 0$  ..... 1 p

Atunci

$$\sum_{k=1}^{2026} \frac{\sqrt{x+k}}{x+k+1} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2026} \frac{x+k+1}{x+k+1}$$
..... 1 p

$$= \frac{1}{2} \cdot 2026 = 1013$$
 ..... 1 p

2. Folosim faptul că  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$  ..... 2 p

Avem  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})$  ..... 1 p

$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$  ..... 1 p

$= z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + z_1 \cdot \bar{z}_1 - z_1 \cdot \bar{z}_2 - z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2$  ..... 2 p

$= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$  ..... 1 p

3. Pentru  $y = 0$  avem  $f(x + f(0)) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$  ..... 1 p

$f(2x + f(0)) = f(2x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$  ..... 1 p

Pentru  $y = x$  avem  $f(x + f(x)) = f(2x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$  ..... 1 p

Deci  $f(2x + f(0)) = f(x + f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$  ..... 1 p

Se știe că orice funcție strict crescătoare este injectivă ..... 1 p

Din ultima egalitate  $\Rightarrow 2x + f(0) = x + f(x), \forall x \in \mathbb{R}$  ..... 1 p

Notând  $f(0) = a \Rightarrow f(x) = x + a$ , înlocuind în relația dată  $\Rightarrow a = 1$  și deci

$f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$  ..... 1 p

**4. Soluția 1:** Din a doua ecuație  $\Rightarrow y = \log_2(5^x + 7)$  ..... **2 p**

Din prima ecuație  $\Rightarrow y = 5^{2-\log_2 x}$  ..... **2 p**

Egalând obținem ecuația  $\log_2(5^x + 7) = 5^{2-\log_2 x}$  unde cele două funcții din cei doi membri sunt de monotonii diferite  $\Rightarrow$  soluția unică  $x = 2$  ..... **2 p**

Atunci  $y = 5$  ..... **1 p**

**Soluția 2:** Din ecuația  $\log_2 x + \log_5[\log_2(5^x + 7)] = 2$ , cum funcția din membrul stâng este strict monotonă  $\Rightarrow x = 2$  soluție unică.