

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 8 februarie 2025
Clasa a VIII - a

Barem de corectare și notare

1. a) Determinați valorile numerelor reale x și y , cu $x, y \in (0, \infty)$, $x > y$, pentru care $x^2 + y^2 = 290$ și $xy = 143$.

b) Fie numerele reale x, y astfel încât $x - y + 1 = 0$ și $y \in [1; 3]$. Arătați că

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13} = 2\sqrt{2}.$$

Soluție:

a)

$$(x + y)^2 = 576$$

$$x, y \in (0, \infty) \Rightarrow x + y = 24$$

1p

$$(x - y)^2 = 4 \Rightarrow |x - y| = 2$$

$$x > y \Rightarrow x - y = 2$$

1p

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 11 \end{cases}$$

1p

b)

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} = 2\sqrt{2}$$

1p

$$\sqrt{2(y - 1)^2} + \sqrt{2(y - 3)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$|y - 1| + |y - 3| = 2$$

2p

$$y \in [1; 3] \Rightarrow |y - 1| = y - 1$$

$$y \in [1; 3] \Rightarrow |y - 3| = 3 - y$$

$$y - 1 + 3 - y = 2$$

$$\Rightarrow 2 = 2$$

1p

2. Fie a, b, n trei numere naturale nenule astfel încât intervalul (a, b) conține un singur număr natural.

a) Demonstrați relația:

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{b+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+2}{b+2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a+n}{b+n} \right\rfloor = 0$$

b) Determinați valorile numerelor naturale nenule a, b, n știind că:

$$\left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+1}{a+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+2}{a+2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{b+n}{a+n} \right\rfloor = 2025.$$

Soluție:

a)

$a, b \in \mathbb{N}^*$, cu (a, b) interval

$$\Rightarrow 0 < a < b \Rightarrow a + n < b + n \Rightarrow 0 < \frac{a+n}{b+n} < 1 \Rightarrow$$

1p

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a+1}{b+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a+2}{b+2} \right\rfloor = \dots = \left\lfloor \frac{a+n}{b+n} \right\rfloor = 0 \Rightarrow$$

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{b+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+2}{b+2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a+n}{b+n} \right\rfloor = 0$$

1p

b)

Din $a, b \in \mathbb{N}^*$, cu (a, b) interval ce conține un singur număr natural $\Rightarrow b = a + 2 \Rightarrow$ 1p

$$\frac{b+n}{a+n} = \frac{a+n+2}{a+n} = 1 + \frac{2}{a+n} \Rightarrow$$
 1p

$$\left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+1}{a+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+2}{a+2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{b+n}{a+n} \right\rfloor = 2025 \Leftrightarrow$$

$$\left[1 + \frac{2}{a} \right] + \left[1 + \frac{2}{a+1} \right] + \left[1 + \frac{2}{a+2} \right] + \dots + \left[1 + \frac{2}{a+n} \right] = 2025 \Leftrightarrow$$

$$(n+1) + \left[\frac{2}{a} \right] + \left[\frac{2}{a+1} \right] + \left[\frac{2}{a+2} \right] + \dots + \left[\frac{2}{a+n} \right] = 2025 \Leftrightarrow$$

$$n + \left[\frac{2}{a} \right] + \left[\frac{2}{a+1} \right] + 0 = 2024 \Leftrightarrow$$
 1p

$$a = 1 \Rightarrow n = 2021, b = 3$$

$$a = 2 \Rightarrow n = 2023, b = 4$$

$$a > 2 \Rightarrow n = 2024, b = a + 2$$
 2p

3. Fie $ABCD$ un tetraedru cu baza triunghiul echilateral BCD , iar G_1 și G_2 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABD , respectiv ACD .

a) Arătați că $G_1G_2 \parallel (BCD)$.

b) Fie PQ o dreaptă ce conține centrul bazei, cu $P \in (CD)$ și $Q \in (BC)$.

Arătați că $AC \parallel (G_1PQ)$.

Soluție:

a) Fie R mijlocul muchiei AD .

$$CR \text{ mediană în } \triangle ACD \Rightarrow \frac{G_2R}{CR} = \frac{1}{3}$$
 1p

$$BR \text{ mediană în } \triangle ABD \Rightarrow \frac{G_1R}{BR} = \frac{1}{3}$$
 1p

$$\frac{G_2R}{CR} = \frac{G_1R}{BR} \Rightarrow G_1G_2 \parallel BC$$
 1p

$$G_1G_2 \parallel BC, BC \subset (BCD) \Rightarrow G_1G_2 \parallel (BCD)$$
 1p

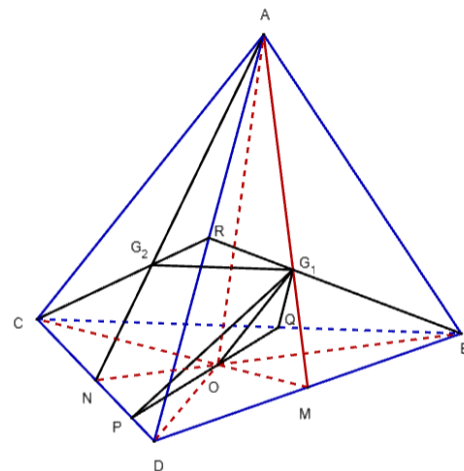
b) Fie O centrul bazei BCD și M mijlocul BD .

$$AM \text{ mediană în } \triangle ABD \Rightarrow \frac{G_1M}{AM} = \frac{1}{3}$$
 1p

$$CM \text{ mediană în } \triangle BDC \Rightarrow \frac{OM}{MC} = \frac{1}{3}$$
 1p

$$\frac{G_1M}{AM} = \frac{OM}{MC} \Rightarrow G_1O \parallel AC$$

$$G_1O \parallel AC, G_1O \subset (G_1PQ) \Rightarrow AC \parallel (G_1PQ)$$
 1p



4. Se consideră tetraedrul regulat $VABC$ și punctele M, O, N și P mijloacele laturilor BC, AM, VO , respectiv MN .

Știind că $OP \cap VM = \{T\}$, arătați că $AT \perp (VBC)$.

Soluție:

Fie $AN \cap VM = R$

OP linie mijlocie în $\triangle MAN \Rightarrow OP \parallel AN \Rightarrow$ 1p

OT linie mijlocie $\triangle MAR \Rightarrow T$ mijlocul $[RM]$ 1p

NR linie mijlocie $\triangle VOT \Rightarrow R$ mijlocul $[VT]$ 1p

VM mediană în $\triangle VBC$ $\left. \begin{array}{l} \frac{VT}{VM} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow T$ centru de greutate în $\triangle VBC$ 2p

$\triangle VBC$ echilateral $\Rightarrow T$ centru cercului circumscris

triunghiului $\triangle VBC$, $VABC$ tetraedru regulat $\Rightarrow AT \perp (VBC)$ 2p

