

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 8 februarie 2025
Clasa a X - a

1. a) Dați un exemplu de numere reale a, b, c , distincte, strict pozitive, diferite de 1, pentru care

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a < 3.$$

- b) Dacă $a, b, c \in (1, +\infty)$ sunt numere reale distincte, demonstrați că

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a > 3.$$

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice numere reale x, y are loc egalitatea

$$f(x + yg(x)) = (y + 1)g(x).$$

- a) Arătați că dacă g este funcție constantă, atunci f este funcția identic nulă.

- b) Determinați f .

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\sqrt[3]{27+x} + \sqrt[3]{27-x} = \frac{3(x^2+2)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

4. Fie a, b, c numere reale distincte două câte două. Numerele complexe $z \neq 0$ și u au proprietatea că

$$a \cdot z^5 + b \cdot u + \frac{c}{z} = b \cdot z^5 + c \cdot u + \frac{a}{z} = c \cdot z^5 + a \cdot u + \frac{b}{z}.$$

Demonstrați că $z^6 = 1$ dacă și numai dacă $u = \bar{z}$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru - 3 ore