

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală

Clasa a X - a

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Nu se acorda puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

Problema nr. 1

Fie $a \in (1; +\infty)$ și numerele $x = \sqrt[4^n]{\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{a}\right)^{2^n}}$ și $y = \sqrt[2^{n+1}]{\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n(n+1)]{a}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $x > y$.

Rezolvare:

$$x = \sqrt[4^n]{\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{a}\right)^{2^n}} = \sqrt[4^n]{\left(a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}\right)^{2^n}} = \left(a^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2^n}{2^{2n} - 1}} = a^{\frac{2^n - 1}{2^{2n} - 1}} = a^{\frac{1}{2^n + 1}} \quad \underline{3p}$$

$$y = \sqrt[2^{n+1}]{\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n(n+1)]{a}} = \sqrt[2^{n+1}]{a^{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}}} = a^{\frac{1 - \frac{1}{n+1}}{2^{n+1}}} = a^{\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}} \quad \underline{3p}$$

$$a > 1 \text{ și } 1 > \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow a > a^{\frac{n}{n+1}} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2^n + 1}} > \left(a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{2^n + 1}} \Leftrightarrow x > y \quad \underline{1p}$$

Problema nr. 2

Să se determine relația dintre $a, b \in \mathbb{Z}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a[x] + b[2x]$ este bijectivă și $f = f^{-1}$. S-a notat $[x]$ partea întreagă a numărului x .

Rezolvare:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(f(x)) = x \quad \underline{2p}$$

$$f(f(x)) = f(x) + a[f(f(x))] + b[2f(x)] = \quad \underline{3p}$$

$$x + a[x] + b[2x] + a[x + a[x] + b[2x]] + b[2(x + a[x] + b[2x])] =$$

$$x + [x](a + a + a^2 + 2ab) + [2x](b + ab + b + 2b^2) = x + [x](a^2 + 2ab + 2a) + [2x](2b^2 + ab + 2b)$$

$$\begin{cases} a^2 + 2ab + 2a = 0 \\ 2b^2 + ab + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0, b = 0 \text{ sau } a + 2b + 2 = 0 \text{ sau } a = 0, b = -1 \text{ sau } b = 0, a = -2.$$

2p

Problema nr. 3

Punctele D, E, F împart laturile AB, BC respectiv CA ale unui triunghi în același raport k . Punctele M, N, P împart segmentele $[AD], [BE]$ respectiv $[CF]$ în același raport l . Să se arate că triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate.

Rezolvare:

Fie $A(a), B(b)$ și $C(c)$

1p

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = k \Rightarrow D\left(\frac{b+kc}{1+k}\right), E\left(\frac{c+ka}{1+k}\right), F\left(\frac{a+kb}{1+k}\right)$$

2p

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NE} = \frac{CP}{PF} = l \Rightarrow M\left(\frac{a(1+k)+lb+klc}{(1+k)(1+l)}\right), N\left(\frac{b(1+k)+lc+kla}{(1+k)(1+l)}\right), P\left(\frac{c(1+k)+la+klb}{(1+k)(1+l)}\right)$$

3p

$$\Leftrightarrow z_{MNP} = \frac{z_M + z_N + z_P}{3} = \frac{a+b+c}{3} = z_{ABC}$$

1p

Problema nr. 4

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $a^{\log_b x^2} + a^{\log_x b^2} = a^{1+\log_b x} + a^{1+\log_x b}$, unde $a, b > 1$.

G.M. -B 1/2024

Rezolvare:

CE: $x > 0$
 $x \neq 1$

1p

$$1) \quad x \in (0; 1) \Rightarrow \log_b x < 0 \text{ și } \log_x b < 0 \Leftrightarrow a^{\log_b x^2} + a^{\log_x b^2} = a^{2\log_b x} + a^{2\log_x b} < a^{1+\log_b x} + a^{1+\log_x b}$$

2p

deci nu sunt soluții pt $x \in (0; 1)$

$$2) \quad x \in (1; +\infty) \Rightarrow a^{\log_b x^2} + a^{\log_x b^2} \geq \frac{(a^{\log_b x} + a^{\log_x b})^2}{2} \geq a^{1+\log_b x} + a^{1+\log_x b}$$

2p

$$\Leftrightarrow a^{\log_b x} + a^{\log_x b} \geq 2\sqrt{a^{\log_b x + \log_x b}} \geq 2\sqrt{a^{2\sqrt{\log_b x \cdot \log_x b}}} = 2a$$

1p

Deci avem soluție unică $x = b$

1p