

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală

CLASA a XII-a

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.
- Timp efectiv de lucru: 3 ore

1. Să se calculeze integrala $\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2026} dx, x > 0$

2. Fie mulțimea $M = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m \text{ și } n \text{ impare} \right\}$ și $G = M \times \mathbb{Z}$.

Pe G definim legea de compoziție $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 + b_2)$, oricare ar fi $a_1, a_2 \in M$ și $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$. Arătați că:

a) $(G, *)$ formează un grup.

b) funcția $f: G \rightarrow \mathbb{Q}^*, f((a, b)) = a \cdot 2^b$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și (\mathbb{Q}^*, \cdot) .

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și F o primitivă a sa cu proprietatea că

$$e^{x-F(x)} = F(x), (\forall) x \in \mathbb{R}. \text{ Calculați } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

4. Se consideră grupul (G, \cdot) și elementele $a, b \in G$, iar $x = aba^{-1}$. Să se calculeze x^2, x^3, x^{2025} .