Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 7 februarie 2025

Clasa a VII-a - Enunţuri şi bareme orientative

1. Considerăm mulţimea $\mathcal{M}=\left\{\sqrt{n} \mid n\in\mathbb{N}, n\le 2024, n \text{ par}\right\}$.

a) Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii $\mathcal{M}$.

b) Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii $\mathcal{M}\cap\mathbb{Q}$.

Gazeta Matematică 2024, supliment

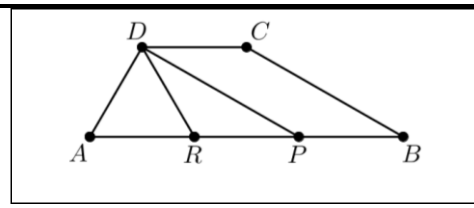
Barem: **a)** Avem $\mathcal{M}=\left\{\sqrt{0},\sqrt{2},\sqrt{4},...,\sqrt{2024}\right\}$ deci 1013 elemente **3p**

b) Deoarece $45^2=2025$ atunci cel mai mare număr raţional din $\mathcal{M}$ este $\sqrt{44^2}$ deci sunt 23 de elemente în $\mathcal{M}\cap\mathbb{Q}$. **4p**

2. Fie $ABCD$ un trapez cu baza mare AB, $AB=3CD$, $AD=CD$ şi $\sphericalangle A=60^\circ$. Pe latura AB se consideră un punct P astfel încât $AP=2BP$. Demonstraţi că:

a) $PBCD$ este paralelogram;

b) $AD\perp BC$.



Barem: **a)** Avem $AB=3BP$ deci $BP=CD$. Atunci $PBCD$ este paralelogram deoarece are două laturi opuse paralele şi egale. .. **2p**

b) Fie R mijlocul segmentului AP. Triunghiul ADR este echilateral **1p**

Triunghiul RDP este isoscel şi atunci $\sphericalangle RDP=30^\circ$. Obţinem

Că $\sphericalangle ADP=90^\circ$ deci $AD\perp DP$. Deoarece $DP\parallel BC$ obţinem concluzia. **4p**

3. Notăm cu $\mathcal{A}$ mulţimea tuturor numerelor naturale care dau restul 1 la împărţirea cu 4.

a) Daţi exemplu de 5 elemente diferite $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\in\mathcal{A}$ pentru care $\sqrt{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}\in\mathbb{Q}$.

b) Demonstraţi că $\sqrt{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, oricare ar fi $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\in\mathcal{A}$.

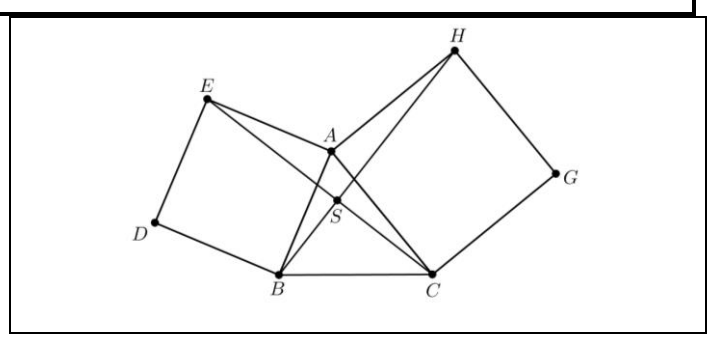
Barem: **a)** De exemplu $\sqrt{5+9+13+17+37}=9$ **2p**

b) Deoarece toate numerele din $\mathcal{A}$ sunt de forma $4k+1$ atunci suma oricăror 7 elemente va fi de forma $4l+7=4(l+1)+3$. Concluzia se obţine folosind faptul că orice pătrat perfect este de forma $4p$ sau $4p+1$. **5p**

4. În exteriorul triunghiului ascuţitunghic ABC se construiesc pătratele $ABDE$ şi $ACGH$. Fie $CE\cap BH=\{S\}$

a) Demonstraţi că $CE\equiv BH$.

b) Determinaţi măsura unghiului BSC.



Barem: **a)** Conform cazului LUL avem $\triangle AEC\equiv\triangle ABH$ de unde concluzia. **3p**

b) Vom demonstra că unghiul $\sphericalangle BSC=90^\circ$. Din punctul anterior avem $\sphericalangle AES\equiv\sphericalangle ABS$ de unde $\sphericalangle SED+\sphericalangle SBD=\sphericalangle AED+\sphericalangle ABD=180^\circ$. Suma unghiurilor patrulaterului $SEDB$ conduce la concluzie. ....… **4p**