INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN HUNEDOARA

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 7 februarie 2025

Clasa a V-a - Enunţuri şi bareme orientative

1. **a)** Arătaţi că $1^2+2^2+5^2+25^2+37^2=2024$.

b) Arătaţi că numărul 2024^{2025} se poate scrie ca o sumă de cinci pătrate perfecte nenule şi diferite.

Gazeta Matematică 2024, supliment

Barem: **a)** Verificare **2p**

b) Avem $2024^{2025}=\left(2024^{1012}\right)^2\cdot 2024$ **2p**

$=\left(2024^{1012}\right)^2\left(1^2+2^2+5^2+25^2+37^2\right)$

$=\left(2024^{1012}\cdot 1\right)^2+\left(2024^{1012}\cdot 2\right)^2+\left(2024^{1012}\cdot 5\right)^2+\left(2024^{1012}\cdot 25\right)^2+\left(2024^{1012}\cdot 37\right)^2$ **3p**

2. Într-o şcoală toţii elevii claselor a V-a practică cel puţin un sport, respectiv baschet sau fotbal. Se ştie că în clasele a V-a sunt 45 elevi în total şi numărul jucătorilor de fotbal este de două ori mai mare decât al jucătorilor de baschet. Determinaţi numărul celor care practică fotbalul în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) Fiecare elev practică exact un singur sport.

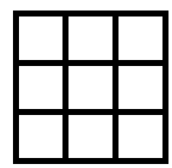
b) Există 6 elevi care practică ambele sporturi.

Barem: **a)** Din $45:3=15$ obţinem 15 baschetbalişti şi 30 fotbalişti. **2p**

b) Deoarece sunt 6 elevi care practică ambele sporturi putem considera că sunt $45+6=51$ sportivi .**2p**

Apoi $51:3=17$ deci sunt 17 baschetbalişti şi 34 fotbalişti. **3p**

3. În figura alăturată este reprezentat un tablou cu trei linii şi trei coloane. Se aleg la întâmplare nouă numere naturale consecutive şi se distribuie câte unul în fiecare căsuţă a acestui tablou astfel încât suma celor trei numere de pe fiecare linie să fie număr impar.



a) Să se dea un exemplu de completare a tabloului în cazul în care cel mai mic dintre cele nouă numere este egal cu 7.

b) Să se arate că dacă cel mai mic dintre numere este umăr par atunci tabloul nu poate fi completat în condiţiile solicitate.

Barem: **a)** Exemplu **2p**

b) Avem 9 numere în tablou. Dacă pe fiecare linie suma numerelor este impară atunci suma celor 9 numere din tablou este tot impară. **2p**

Dacă primul număr ar fi par am avea 5 numere pare şi 4 numere impare. Suma acestora ar fi număr par ceea ce nu convine. **3p**

4. O pereche $(a;b)$ de numere naturale se numeşte *acceptabilă* dacă $a>b$ şi dacă împărţim pe a la b obţine câtul 4 şi restul 2.

a) Daţi exemplu de două perechi *acceptabile*.

b) Câte perechi *acceptabilă* au proprietatea că numărul $a+b$ este pătrat perfect?

Barem: **a)** Exemple **2p**

b) Vom demonstră că nu există nici o astfel de pereche. Avem $a=4b+2$ şi atunci $a+b=5b+2$. Ultima cifră a numărului $a+b$ este 2 sau 7, deci nu este pătrat perfect. **5p**