

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa locală****8 februarie 2025****Clasa a XII-a****Barem de notare****SUBIECTUL I:**

Se consideră mulțimea  $M = (-\infty, 1)$ . Pentru fiecare pereche  $(x, y) \in M \times M$  notăm

$$x * y = \frac{2024 - xy}{2025 - x - y}$$

a) Arătați că funcția  $(x, y) \rightarrow x * y$  definește o lege de compoziție pe  $M$ .

b) Demonstrați că legea este comutativă și asociativă, dar nu are element neutru.

a)

$x + y < 2 < 2025$  ..... 1p

$$\frac{2024 - xy}{2025 - x - y} < 1 \Leftrightarrow 2024 - xy < 2025 - x - y \Leftrightarrow xy - x - y + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0, \text{ care}$$

este adevărată pentru  $x, y \in (-\infty, 1)$  ..... 1p

b)

comutativitate..... 1p

asociativitate..... 2p

Presupunem prin reducere la absurd că există  $e \in (-\infty, 1)$  element neutru atunci  $0 \cdot e = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2024 - 0 \cdot e}{2025 - 0 - e} = 0 \Leftrightarrow 2024 = 0 \text{ contradicție ..... 2p}$$

## SUBIECTUL II:

2. Se consideră funcțiile  $f, F : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sin 7x}{\sin x} \text{ și } F(x) = x + \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{3} \sin 6x. \text{ Arătați că } \int f(x) dx = F(x) + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{\sin 7x}{\sin x} dx = \int \frac{\sin 7x - \sin 5x}{\sin x} dx + \int \frac{\sin 5x}{\sin x} dx \dots\dots\dots 1p$$

$$\int \frac{\sin 5x}{\sin x} dx = \int \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} dx + \int \frac{\sin 3x}{\sin x} dx \dots\dots\dots 1p$$

$$\int \frac{\sin 3x}{\sin x} dx = \int \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin x} dx + \int \frac{\sin x}{\sin x} dx \dots\dots\dots 1p$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 7x}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin 7x - \sin 5x}{\sin x} dx + \int \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} dx + \int \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin x} dx + \int \frac{\sin x}{\sin x} dx = \\ &= \int \frac{2 \sin x \cos 6x}{\sin x} dx + \int \frac{2 \sin x \cos 4x}{\sin x} dx + \int \frac{2 \sin x \cos 2x}{\sin x} dx + \int 1 dx = 2 \int \cos 6x dx + 2 \int \cos 4x dx + 2 \int \cos 2x dx + x + \mathcal{C} \end{aligned} \quad 3p$$

$$\text{Finalizare} \dots\dots\dots 1p$$

## SUBIECTUL III:

a) Să se demonstreze că  $(\mathbb{R}, +) \simeq ((0, \infty), \cdot)$

b) Să se demonstreze că  $(\mathbb{R}, +) \not\simeq (\mathbb{R}^*, \cdot)$

a)

$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = e^x$  este un exemplu de izomorfism..... 2p

b)

Presupunem prin reducere la absurd că există  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  un izomorfism

Atunci există  $x \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f(x) = -1$  ..... 2p

$$f(2x) = f(x+x) = f(x) \cdot f(x) = 1 \quad 1p$$

$$\dots\dots\dots f(0) = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \dots\dots\dots 1p$$

Dar  $f(0) = -1$  contradicție..... 1p

**SUBIECTUL IV:**

Fie  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(y) = \int_0^y \frac{1}{x^2 - 2x + y} dx$ .

Calculați  $\int_2^{10} f(y) dy$ .

$$f(y) = \int_0^y \frac{1}{(x-1)^2 + y-1} dy = \int_0^y \frac{1}{(x-1)^2 + (\sqrt{y-1})^2} dx \dots\dots\dots 1p$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{y-1}} \left( \arctg \sqrt{y-1} + \arctg \frac{1}{\sqrt{y-1}} \right) \dots\dots\dots 1p$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{y-1}} \cdot \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 3p$$

$$\int_2^{10} f(y) dy = \pi \int_2^{10} \frac{1}{2\sqrt{y-1}} dy = \pi \sqrt{y-1} = \pi(3-1) = 2\pi \dots\dots\dots 2p$$