

## Olimpiada Națională de Matematică

### Etapă locală

8 februarie 2025

Clasa a IX-a

Barem de notare

Nr. item	Nr. item	Soluție , rezolvare	Punctaj partial	Punctaj
1.		Rezolvați sistemul $\begin{cases} 2x + [y] = 5,3 \\ [x] + y = 4,2 \end{cases}$ , unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $a$ .		
		$[x]+[y]+\{y\}=4,2 \Rightarrow \{y\}=0,2$ si $[x]+[y]=4$ . $2[x]+2\{x\}+[y]=5,3 \Rightarrow 4+[x]+2\{x\}=5,3$ . $[x]+2x-2[x]=1,3 \Rightarrow [x]=2x-1,3=k$ , $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=\frac{k+1,3}{2}$ $k \leq x < k+1 \Rightarrow k \leq \frac{k+1,3}{2} < k+1$ $-0,7 < k \leq 1,3 \Rightarrow k = 0 \text{ sau } 1$	1 p 1 p 1 p 1 p 1 p	7 p
		1) $k=0 \Rightarrow x=0,65$ și $y=4,2$	1 p	
		2) $k=1 \Rightarrow x=1,15$ și $y=3,2$	1 p	
2.		Considerăm paralelogramul ABCD cu $AB=a$ , $BC=c$ , $BD=b$ și fie $M \in (BC)$ astfel încât $2\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = 0$ . Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABD , I este centrul cercului înscris în triunghiul BCD , iar punctele G,I , M sunt coliniare , arătați că $4a=2b+5c$ .		
		$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})$ Se ajunge la $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ .	1 p 2 p	7 p
		$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{a+b+c} (b \cdot \overrightarrow{MC} + a \cdot \overrightarrow{MB} + c \cdot \overrightarrow{MD})$ Se ajunge la $\overrightarrow{MI} = \frac{b-2a+c}{3(a+b+c)}\overrightarrow{AD} - \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AB}$ Cum $\overrightarrow{MG}$ si $\overrightarrow{MI}$ sunt coliniari se obtine $4a=2b+5c$	1 p 2 p 1 p	
3.		Determinați numerele reale strict pozitive $a,b,c$ cu proprietatea ca $a+b+c=1$ și $ab+bc+ca=\sqrt{3abc}$ .		
		$ab+bc+ca=\sqrt{3abc} \mid^2 \Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=abc \mid \cdot 2$	2 p	7 p
		$2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2=2abc(a+b+c)$	2 p	
		$(ab-bc)^2+(bc-ac)^2+(ac-ab)^2=0 \Rightarrow ab=bc$ , $bc=ac$ , $ac=ab$ .	2 p	
		$a=b=c=1/3$	1 p	
		Fie triunghiul ABC , I centrul cercului sau înscris și D , E , F punctele de contact ale acestuia cu laturile BC, CA, AB . Notăm cu D' , E' , F' intersecțiile semidreptelor (DI) , (EI) , (FI) cu cercul înscris în triunghiul ABC și cu H <sub>1</sub> , H <sub>2</sub> , H <sub>3</sub> ortocentrele triunghiurilor D'EF , E'FD respectiv F'DE . Arătați că :		

Strada Victoriei nr.132-134

Tg-Jiu, cod 210234

Telefon: 0253-227177

Fax : 0253-224750

<http://isj.gj.edu.ro> , e-mail : [isjgorj@yahoo.com](mailto:isjgorj@yahoo.com) , [isjgj@utgjiu.ro](mailto:isjgj@utgjiu.ro)

4.	a) $\overrightarrow{D'F} + \overrightarrow{E'D} + \overrightarrow{F'E} = \vec{0}$ dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral ; b) triunghiurile $H_1H_2H_3$ si DEF au acelasi centru de greutate .			
4.a	$\Rightarrow \overrightarrow{D'F} + \overrightarrow{E'D} + \overrightarrow{F'E} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{D'I} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{E'I} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{F'I} + \overrightarrow{IE} = \vec{0}$ $\Rightarrow \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{IE} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{D'I} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{IE} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{D'F} = \overrightarrow{EI} \Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{F'D} = \overrightarrow{EI} \Rightarrow IDF'E \text{ romb} \Rightarrow FD' = D'E = EF' = F'D = DE=EF$ $\Rightarrow m(\hat{A}) = \frac{m(FDE)-m(FD'E)}{2} = 60^0, \text{ analog } m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 60^0 \Rightarrow$ $\Delta ABC \text{ echilateral}$ $\Leftarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^0 \text{ se obține } DF'ED'FE' \text{ hexagon regulat} \Rightarrow \overrightarrow{D'F} + \overrightarrow{E'D} +$ $\overrightarrow{F'E} = \overrightarrow{D'F} + \overrightarrow{FI} + \overrightarrow{F'E} = \overrightarrow{D'I} + \overrightarrow{F'E} = \overrightarrow{D'I} + \overrightarrow{DI} = \vec{0} .$	1 p   1 p 1 p 1 p	7 p	
4.b	Fie G centrul de greutate al $\Delta H_1H_2H_3 \Rightarrow \overrightarrow{GH_1} + \overrightarrow{GH_2} + \overrightarrow{GH_3} = \vec{0} \Rightarrow$ $3\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IH_1} + \overrightarrow{IH_2} + \overrightarrow{IH_3} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{ID'} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IE'} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{ID} +$ $\overrightarrow{IF'} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} = \vec{0} \Rightarrow$ $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = \vec{0} \Rightarrow G \text{ centrul de greutate al } \Delta DEF .$	1 p 1 p 1 p		