

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală

8 februarie 2025

Clasa a V-a

Barem de notare

SUBIECTUL I:

Fie suma $S = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + \dots + 46 \cdot 47 \cdot \dots \cdot 54 \cdot 55 + \dots$

a) Aflați al șaselea termen al sumei.

b) Aflați restul împărțirii lui S la 24.

a)	T_1 are 1 factor, T_2 are 2 factori, ..., T_6 are 6 factori	1p
	$T_1 + T_2 + \dots + T_5$ au împreună $1 + 2 + 3 + \dots + 5 = 15$ factori	1p
	Deci T_6 are 6 factori, iar primul factor este 16	1p
	Obținem $T_6 = 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21$	
b)	$T_3 = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 24 \cdot 5$ $T_4 = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 24 \cdot 210$ $T_5 = 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 = 24 \cdot 15015$	1p
	Începând cu al treilea termen, toți termenii T_3, T_4, T_5, \dots se împart exact la 24 $S = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + \dots = 1 + 6 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 210 + 24 \cdot 15015 + \dots = 1 + 6 + 24 \cdot (5 + 210 + 15015 + \dots)$ Notăm $5 + 210 + 15015 + \dots = k$	1p
	$S = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + \dots = 1 + 6 + 24 \cdot k$, deci $S = 24 \cdot k + 7$, cu $7 < 24$, deci restul este 7	2p

SUBIECTUL II:

a) Să se determine ultimele patru cifre ale numărului $A = 2^{2025} - 2^{2019} - 2^{2018}$

b) Scrieți numărul 90^{2025} ca o sumă de cinci pătrate perfecte.

a)	$A = 2^{2018} \cdot (2^7 - 2^1 - 2^0) = 2^{2018} \cdot 125$	1p
	$A = 2^{2015} \cdot 2^3 \cdot 125 = 2^{2015} \cdot 1000$	1p
	$u(2^{2015}) = u(2^{4 \cdot 503 + 3}) = u(2^3) = 8$, deci ultimele patru cifre sunt $8 \cdot 1000 = 8000$	1p
b)	$90 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$	2p
	$90^{2025} = 90 \cdot 90^{2024} = (2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) \cdot 90^{2024} =$ $2^2 \cdot 90^{2024} + 3^2 \cdot 90^{2024} + 4^2 \cdot 90^{2024} + 5^2 \cdot 90^{2024} + 6^2 \cdot 90^{2024} =$ $(2 \cdot 90^{1012})^2 + (3 \cdot 90^{1012})^2 + (4 \cdot 90^{1012})^2 + (5 \cdot 90^{1012})^2 + (6 \cdot 90^{1012})^2,$ Deci $90^{2025} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$	2p

SUBIECTUL III:

Fie numărul $x = \overline{abb} + \overline{baa} + 37 \cdot (a - 2 \cdot b)$, unde \overline{abb} și \overline{baa} sunt numere naturale de trei cifre scrise în baza zece. Să se determine a și b știind că x este un pătrat perfect.

$\overline{abb} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + b$ $\overline{baa} = 100 \cdot b + 10 \cdot a + a$, cu a, b cifre nenule $x = 100 \cdot a + 10 \cdot b + b + 100 \cdot b + 10 \cdot a + a + 37 \cdot a - 74 \cdot b$	2p
$x = 148 \cdot a + 37 \cdot b$ $x = 37 \cdot (4 \cdot a + b)$	1p
x este pătrat perfect $\Rightarrow 4 \cdot a + b = 37$	1p
Cu a și b sunt cifre nenule obținem $a=9$ și $b=1$ sau $a=8$ și $b=5$ sau $a=7$ și $b=9$	3p

SUBIECTUL IV

a) La un concurs de matematică, la care participă 50 de elevi, se oferă spre rezolvare 3 probleme. Știind că fiecare elev a rezolvat cel puțin o problemă și că numărul soluțiilor corecte ale tuturor concurenților este 100, arătați că numărul celor care au rezolvat corect toate problemele este cel mult 25.

b) Știind că $\overline{abcd} + \overline{abc} \cdot d = 3035$, demonstrați că numărul \overline{abcd} este pătrat perfect (\overline{abcd} și \overline{abc} sunt numere naturale scrise în baza zece).

a)	Fie x -numărul de elevi care a rezolvat o problemă y -numărul de elevi care a rezolvat două probleme z -numărul de elevi care a rezolvat trei probleme Atunci $x + y + z = 50$ și $x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 100$	1p
	Scădem cele două relații și obținem $y + 2 \cdot z = 50$ Din $2 \cdot z \leq 50$ vom obține $z \leq 25$	2p
b)	$\overline{abc} \cdot 10 + d + \overline{abc} \cdot d = 3035$ $\overline{abc} \cdot (10 + d) + d = 3035$,	1p
	$\overline{abc} = (3035 - d) : (10 + d)$, cu \overline{abc} natural și d cifră Obținem $d=5$ și $\overline{abc} = 202$	2p
	$\overline{abcd} = 2025 = 45^2$, pătrat perfect	1p