

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală

8 februarie 2025

Clasa a VII-a

Barem de notare

1.a) Arătați că: $\frac{3^n}{(3^{n+1})(3^{n+1}+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}+1} \right)$.

b) Determinați numărul natural n , astfel încât:

$$\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 10} + \frac{9}{10 \cdot 28} + \dots + \frac{3^n}{(3^n + 1)(3^{n+1} + 1)} = \frac{3^{2025} - 1}{4(3^{2025} + 1)}$$

Soluție:

a)	$\frac{3^n}{(3^{n+1})(3^{n+1}+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3^n}{(3^{n+1})(3^{n+1}+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3-1) \cdot 3^n}{(3^{n+1})(3^{n+1}+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 3^n + 1 - (3^{n+1})}{(3^{n+1})(3^{n+1}+1)} =$ $\frac{1}{2} \left(\frac{3^{n+1}+1}{(3^{n+1})(3^{n+1}+1)} - \frac{3^{n+1}}{(3^{n+1})(3^{n+1}+1)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}+1} \right)$	3p
b)	Folosind punctul a) suma din membrul stâng este egală cu $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{n+1}+1} \right)$.	2p
	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{n+1}+1} \right) = \frac{3^{n+1} - 1}{4(3^{n+1} + 1)}$	1p
	Se obține $n = 2014$	1p

2. a) Arătați că numărul $\sqrt{49 + 20\sqrt{6}} + \sqrt{49 - 20\sqrt{6}} \in \mathbb{N}$.

b) Calculați partea întreagă și partea fracționară a numărului

$$A = \left[\left(\sqrt{49 + 20\sqrt{6}} \right)^{2024} + \frac{1}{\left(\sqrt{49 - 20\sqrt{6}} \right)^{2024}} \right] \cdot \frac{(25 - 10\sqrt{6})^{2025}}{4 \cdot 5^{2025}} - \frac{1}{2}$$

Soluție:

a)	$\sqrt{49 + 20\sqrt{6}} = 5 + 2\sqrt{6}$	1p
	$\sqrt{49 - 20\sqrt{6}} = 5 - 2\sqrt{6}$	1p

Strada Victoriei nr.132-134

Tg-Jiu, cod 210234

Telefon: 0253-227177

Fax : 0253-224750

<http://isj.gj.edu.ro>, e-mail : isjgorj@yahoo.com, isjgj@utqjiu.ro

	$\sqrt{49 + 20\sqrt{6}} + \sqrt{49 - 20\sqrt{6}} = 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} = 10 \in \mathbb{N}$	1p
b)	$A = \left[(5 + 2\sqrt{6})^{2024} + \frac{1}{(5 - 2\sqrt{6})^{2024}} \right] \cdot \frac{5^{2025}(5 - 2\sqrt{6})^{2025}}{4 \cdot 5^{2025}} - \frac{1}{2}$	1p
	$A = \left[\frac{(25 - 24)^{2024} + 1}{(5 - 2\sqrt{6})^{2024}} \right] \cdot \frac{(5 - 2\sqrt{6})^{2025}}{4} - \frac{1}{2}$	1p
	$A = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{2} - \frac{1}{2} = 2 - \sqrt{6}$	1p
	Deoarece $-1 < 2 - \sqrt{6} < 0 \Rightarrow [A] = -1, \{A\} = 2 - \sqrt{6} + 1 = 3 - \sqrt{6}$	1p

3. Fie dreptunghiul $ABCD$, punctul E pe diagonala AC astfel încât $BE = \frac{AB}{2}$ și $\angle ABE = 60^\circ$, punctul F este mijlocul segmentului AE și G este mijlocul segmentului DC .

a) Să se arate că $BE \perp AC$;

b) Dacă $FG \cap AB = \{H\}$, să se arate că $\angle GHB \equiv \angle FBC$.

Soluție:

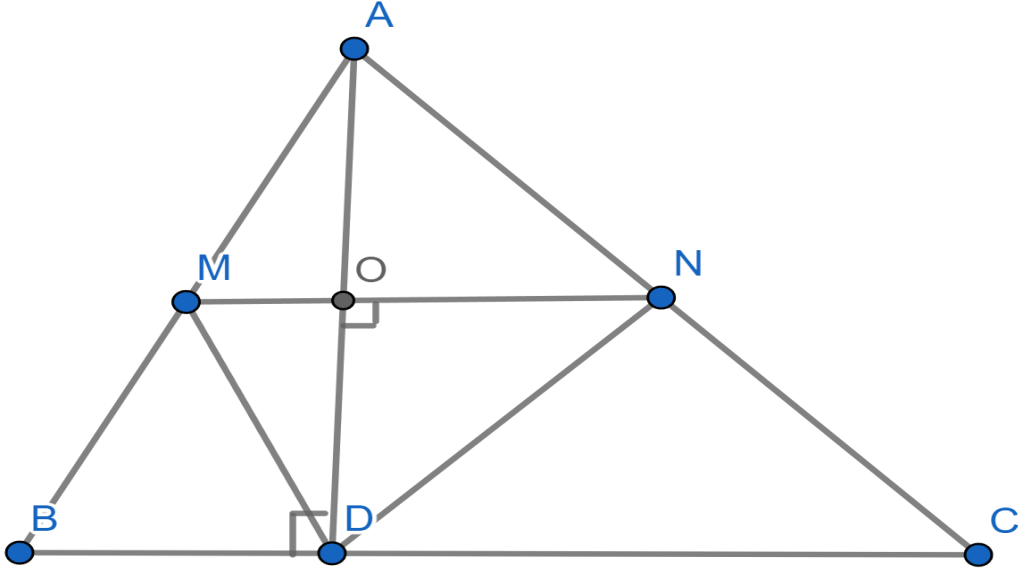
a)	Fie I mijlocul laturii AB . $BI = BE = \frac{AB}{2}$, $\angle ABE = 60^\circ \Rightarrow \triangle EBI$ echilateral.	1p
	$IE = AI = \frac{AB}{2} \Rightarrow \triangle AIE$ isoscel	1p
	$\angle AIE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle IAE = \angle AEI = 30^\circ \Rightarrow \angle AEB = 90^\circ \Rightarrow$	1p

	$BE \perp AC$	
b)	Fie $FJ \perp BC, J \in BC$ și $FJ \cap BE = \{L\}$ L este ortocentrul $\triangle FBC \Rightarrow CL \perp FB$	1p
	FL linie mijlocie în $\triangle EAB$ ($AF = FE; AB \perp BC, FJ \perp BC \Rightarrow FJ \parallel AB$) $FL = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = CG; FL \parallel AB, AB \parallel CD \Rightarrow FL \parallel CD$ Obținem FLCG paralelogram.	1p
	$GF \parallel CL$ și $CL \perp FB$. Obținem $GF \perp FB \Rightarrow \angle HFB = 90^\circ$	1p
	Unghiurile $\angle GHB$ și $\angle FBC$ au același complement $\angle FBA$, deci sunt congruente.	1p

4. În triunghiul ABC ducem înălțimea $AD, D \in BC$ și notăm cu M și N mijloacele laturilor AB respectiv AC . Știind că punctele A, M, D și N sunt situate pe un cerc, aflați măsura unghiului BAC .

G. M.

Soluție:

	
MN linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel BC, AD \perp BC \Rightarrow AD \perp MN$	1p
În $\triangle ADC$, $\angle ADC = 90^\circ$, DN mediană $\Rightarrow DN = \frac{AC}{2} \Rightarrow DN = AN \Rightarrow \triangle ADN$ isoscel $\Rightarrow \angle NAD = \angle ADN = a^\circ$	1p
În $\triangle ADB$, $\angle ADB = 90^\circ$, DM mediană $\Rightarrow DM = \frac{AB}{2} \Rightarrow DM = AM \Rightarrow \triangle ADM$ isoscel $\Rightarrow \angle MAD = \angle ADM = b^\circ$	1p
$AMDN$ patrulater inscriptibil $\Rightarrow \angle NAD \equiv \angle DMN = a^\circ$	2p
$MN \cap AD = \{O\}$. În $\triangle DOM$, $\angle MOD = 90^\circ \Rightarrow a^\circ + b^\circ = 90^\circ$	1p
$\angle BAC = \angle MAD + \angle NAD = b^\circ + a^\circ = 90^\circ$	1p