

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa locală**  
**8 februarie 2025**  
**Clasa a VIII-a**  
**Barem de notare**

**Problema 1.**

a) Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  care verifică egalitatea:

$$3a+3b+28=8\sqrt{3a+5}+6\sqrt{3b-2} \text{ și calculați } (a-b-1)^{2024}.$$

S. G. M.

b) Fie  $a, b, c$  numere raționale nenule astfel încât  $a+b \neq 0, b+c \neq 0, c+a \neq 0$  și  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$

Arătați că valoarea expresiei  $\frac{a(2a+7)}{b+c} + \frac{b(2b+7)}{c+a} + \frac{c(2c+7)}{a+b}$  este număr natural prim.

G. M.

**Soluție:**

a)  $3a+5-8\sqrt{3a+5}+16+3b-2-6\sqrt{3b-2}+9=0 \dots\dots\dots 1p$   
 $(\sqrt{3a+5}-4)^2 + (\sqrt{3b-2}-3)^2 = 0 \dots\dots\dots 1p$

$a = \frac{11}{3}$  și  $b = \frac{11}{3} \dots\dots\dots 1p$

$(a-b-1)^{2024} = 1 \dots\dots\dots 1p$

b)  $\frac{a(2a+7)}{b+c} + \frac{b(2b+7)}{c+a} + \frac{c(2c+7)}{a+b} = \frac{7a}{b+c} + \frac{7b}{c+a} + \frac{7c}{a+b} + \frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \dots\dots\dots 1p$   
 $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = \left(a + \frac{a^2}{b+c}\right) + \left(b + \frac{b^2}{c+a}\right) + \left(c + \frac{c^2}{a+b}\right) - a - b - c = \frac{a(a+b+c)}{b+c} + \frac{b(a+b+c)}{c+a} + \frac{c(a+b+c)}{a+b} - a - b - c = (a+b+c)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) - a - b - c = 0 \dots\dots\dots 1p$   
 $\frac{a(2a+7)}{b+c} + \frac{b(2b+7)}{c+a} + \frac{c(2c+7)}{a+b} = 7$  este număr natural prim  $\dots\dots\dots 1p$

**Problema 2.**

Se consideră numerele reale  $x$  și  $y$ , astfel încât  $y-x=2$  și  $y>2$ .

Arătați că expresia  $E(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4y+4}-\sqrt{x^2+y^2+2(x-y+1)}$  are valoare constantă.

**Soluție:**

$E(x,y)=\sqrt{(y-2)^2+y^2-4y+4}-\sqrt{(y-2)^2+y^2+2(y-2-y+1)} \dots\dots\dots 2p$

$E(x,y)=\sqrt{2(y-2)^2}-\sqrt{2(y-1)^2} \dots\dots\dots 2p$

$E(x,y)=\sqrt{2}|y-2|-\sqrt{2}|y-1| \dots\dots\dots 2p$

$E(x,y)=-\sqrt{2} \dots\dots\dots 1p$

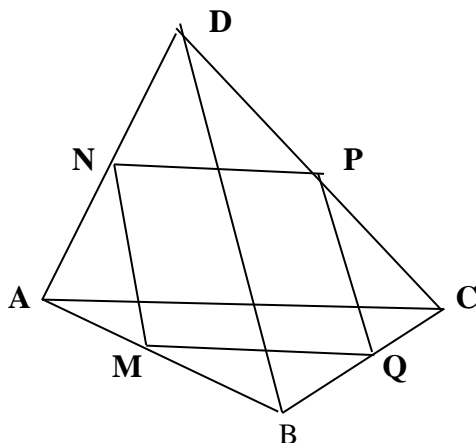
### Problema 3.

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Printr-un punct M situat pe segmentul AB se duce un plan paralel cu AC și BD. Acest plan intersectează pe BC în Q, pe CD în P și respectiv pe AD în N.

a) Demonstrați că MNPQ este paralelogram.

b) Dacă  $AM = x$  cm,  $AB = 5$  cm,  $AC = 12$  cm și  $BD = 7$  cm, să se calculeze, în funcție de x, perimetrul patrulaterului MNPQ.

#### Soluție:



a)  $DB \parallel (MNP)$

$(ADB) \cap (MNP) = MN \Rightarrow MN \parallel DB$

$(DBC) \cap (MNP) = PQ \Rightarrow PQ \parallel DB \Rightarrow MN \parallel PQ$ .....1p

$AC \parallel (MNP)$

$(ABC) \cap (MNP) = MQ \Rightarrow MQ \parallel AC$

$(DAC) \cap (MNP) = PN \Rightarrow PN \parallel AC \Rightarrow MQ \parallel PN$ .....1p

b) În triunghiul ABC,  $\frac{AC}{MQ} = \frac{AB}{MB} \Rightarrow MQ = \frac{12(5-x)}{5}$  .....2p

În triunghiul ABD,  $\frac{MN}{BD} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MN = \frac{7x}{5}$  .....2p

$P = 2(MQ + MN) = 2(12 - x)$  .....1p

### Problema 4.

În paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  avem,  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AA' = c$ .

Notăm cu E și F proiecțiile punctului D pe AC, respectiv pe  $A' C'$  și cu P și Q proiecțiile punctului  $C'$  pe  $B' D'$ , respectiv pe  $D' B$ .

Arătați că planele (DEF) și  $(C' P Q)$  sunt perpendiculare dacă și numai dacă  $a^2 + c^2 = b^2$ .

#### Soluție:

$A' C \perp (DEF)$  .....2p

$D' B \perp (C' P Q)$  .....2p

$(DEF) \perp (C' P Q)$  dacă și numai dacă  $A' C \perp D' B$ .....1p

$A' C \perp D' B$  dacă și numai dacă  $a^2 + c^2 = b^2$ .....2p