

Olimpiada Națională de Matematică**Etapa locală****8 februarie 2025****Clasa a XI-a****Barem de notare**1. a) Suntem în cazul 1^∞ 1pLimita devine $e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-2 \cdot 3^n}{1+2^n} \right)} = e^{-\infty} = 0$ 2pb) Obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - \sqrt[3]{a + \frac{b}{n}} \right) = 2$, de unde în mod necesar $a = 1$ 1pLimita se mai scrie $\lim_{n \rightarrow \infty} \left((\sqrt{n^2 + 2n} - n) + (n - \sqrt[3]{n^3 + bn^2}) \right) = 1 - \frac{b}{3}$,de unde $b = -3$ 3p2. a) Ecuația devine $9 \begin{vmatrix} 1 & 2^x & 4^x \\ 1 & 3^{x-1} & 9^{x-1} \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Determinantul fiind de tip Vandermonde, deducem că

$$(3^{x-1} - 2^x)(1 + 3^{x-1})(1 + 2^x) = 0 \dots\dots\dots 2p$$

Unica soluție a ecuației este $x = \log_{\frac{3}{2}} 3$ 1pb) Notăm cu Δ determinantul din enunț. Din proprietățile determinantilor, obținem că

$$\Delta = 2abc(b-a)(c-a)(c-b) \dots\dots\dots 2p$$

Două din cele trei numere, fie acestea a, b au aceeași paritate, deci $2/(b-a)$,deci $2/(b-a)(c-a)(c-b)$. Dacă toate cele trei numere sunt impare, atunci $8/(b-a)(c-a)(c-b)$, altfel $2/abc$.Așadar $8/\Delta$ 1pDacă unul dintre numere este divizibil cu 3 atunci $3/\Delta$, altfel există două, fie acestea a, b care dau același rest la împărțirea cu 3, deci $3/(b-a)$, de unde $3/\Delta$, de unde concluzia... ..1p

3. Obținem că $X^4 = X \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X$, de unde rezultă că $X = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & n & 0 \\ -c & 0 & a \end{pmatrix} \dots \dots 3p$

Atunci $X^3 = \begin{pmatrix} a^3 - 3ac^2 & 0 & 3a^2c - c^3 \\ 0 & n^3 & 0 \\ -3a^2c + c^3 & 0 & a^3 - 3ac^2 \end{pmatrix}$ deci $n = 1, a^3 - 3ac^2 = 0, 3a^2c - c^3 = 1 \dots \dots \dots 1p$

Dacă $a = 0$ rezultă $c = -1$ și obținem $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots 1p$

În cazul $a \neq 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4}$ de unde obținem

$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \dots \dots \dots 2p$

4. a) Se arată inductiv că $a_n > 0, n \geq 1 \dots \dots \dots 1p$

Obținem că $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{1+2a_n^2}} < 1$, deci șirul este strict descrescător, deci convergent... $1p$

Trecând la limită în relația de recurență rezultă că limita este egală cu 0 ... $1p$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}}$. Cum șirul $\frac{1}{a_n^2}$ tinde strict crescător către ∞ , se poate aplica lema Stolz-

Cesaro... $1p$

Obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2 a_n^2}{a_n^2 - a_{n+1}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^4}{2a_n^4} = \frac{1}{2}$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n^2 = \frac{1}{2} \dots \dots \dots 3p$