

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală

8 februarie 2025

Clasa a VII-a

SUBIECTUL I:

1.a) Arătați că: $\frac{3^n}{(3^n+1)(3^{n+1}+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^n+1} - \frac{1}{3^{n+1}+1} \right).$

b) Determinați numărul natural n , astfel încât:

$$\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 10} + \frac{9}{10 \cdot 28} + \dots + \frac{3^n}{(3^n+1)(3^{n+1}+1)} = \frac{3^{2025}-1}{4(3^{2025}+1)}$$

SUBIECTUL II:

2. a) Arătați că numărul $\sqrt{49+20\sqrt{6}} + \sqrt{49-20\sqrt{6}} \in \mathbb{N}.$

b) Calculați partea întreagă și partea fracționară a numărului

$$A = \left[\left(\sqrt{49+20\sqrt{6}} \right)^{2024} + \frac{1}{\left(\sqrt{49-20\sqrt{6}} \right)^{2024}} \right] \cdot \frac{(25-10\sqrt{6})^{2025}}{4 \cdot 5^{2025}} - \frac{1}{2}$$

SUBIECTUL III:

3. Fie dreptunghiul $ABCD$, punctul E pe diagonala AC astfel încât $BE = \frac{AB}{2}$ și $\angle ABE = 60^\circ$, punctul F este mijlocul segmentului AE și G este mijlocul segmentului DC .

a) Să se arate că $BE \perp AC$;

b) Dacă $FG \cap AB = \{H\}$, să se arate că $\angle GHB \equiv \angle FBC$.

SUBIECTUL IV:

4. În triunghiul ABC ducem înălțimea AD , $D \in BC$ și notăm cu M și N mijloacele laturilor AB respectiv AC . Știind că punctele A , M , D și N sunt situate pe un cerc, aflați măsura unghiului BAC .

G. M.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect este notat cu 7p.

Nu se acordă nici un punct din oficiu. Timp de lucru 3 ore.