

Olimpiada Națională de Matematică**Etapă locală****8 februarie 2025****Clasa a X-a****Barem de notare**

1. Rezolvați în \mathbb{R} sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_5 y = 2 \\ 2^y - 5^x = 7 \end{cases}.$$

S. G. M.

Soluție:

Observăm că perechea (2,5) este soluție a sistemului. 2p

Dacă $x < 2$ și $y < 5$ avem $\log_2 x + \log_5 y < 1 + 1 = 2$, ceea ce contrazice prima relație din sistem, deci perechea (x, y) nu este soluție. 1p

Dacă $x > 2$ și $y > 5$ avem $\log_2 x + \log_5 y > 1 + 1 = 2$, ceea ce contrazice prima relație din sistem, deci perechea (x, y) nu este soluție. 1p

Dacă $x < 2$ și $y > 5$ avem $2^y - 5^x > 32 - 25 = 7$, ceea ce contrazice a doua relație din sistem, deci perechea (x, y) nu este soluție. 1p

Dacă $x > 2$ și $y < 5$ avem $2^y - 5^x < 32 - 25 = 7$, ceea ce contrazice a doua relație din sistem, deci perechea (x, y) nu este soluție. 1p

În concluzie perechea (2,5) este unica soluție a sistemului. 1p

2. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, diferite două câte două, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_2 + z_3 - z_1|$. Demonstrați că $z_2 + z_3 = 0$.

Soluție:

Considerăm punctele A, B, C de afixe $-z_1, z_2$, respectiv z_3 1p

Din ipoteză avem $|-z_1| = |z_2| = |z_3|$, deci punctele A, B, C sunt situate pe un cerc cu centrul în origine. 1p

Din teorema lui Sylvester ortocentrul H al triunghiului ABC are afixul

$$z_H = -z_1 + z_2 + z_3. 1p$$

Cum $|z_2 + z_3 - z_1| = |z_H|$, deducem că H este situat pe cercul circumscris triunghiului ABC 1p

Atunci triunghiul ABC este dreptunghic. 1p

Dacă vârful unghiului drept este B sau C , atunci obținem $z_2 + z_3 - z_1 = z_2$ sau $z_2 + z_3 - z_1 = z_3$, de unde deducem $z_1 = z_3$ sau $z_1 = z_2$, în contradicție cu ipoteza. 1p

Deci vârful unghiului drept este A și obținem $z_2 + z_3 - z_1 = -z_1$, deci $z_2 + z_3 = 0$ 1p

3. Determinați funcțiile $f: N \rightarrow N$ cu proprietatea :

$$f(f(n+1)) = f(f(n)+1) = n + 4049, \text{ pentru orice } n \in N.$$

Soluție:

Arătăm că f este injectivă. Pentru aceasta fie $n, m \in N$ astfel încât $f(n) = f(m)$. Obținem $f(f(n)+1) = f(f(m)+1)$, deci $n + 4049 = m + 4049$, sau $n = m$, ceea ce implică f injectivă. 2p

Din egalitatea $f(f(n+1)) = f(f(n)+1)$ și faptul că f este injectivă, obținem că $f(n+1) = f(n)+1, \forall n \in N$ 2p

Această relație ne spune că șirul $(f(n))_{n \in N}$ este o progresie aritmetică de rație 1, deci $f(n) = f(0) + n, \forall n \in N$ 1p

Înlocuind $f(n)$ în relația $f(f(n)+1) = n + 4049$ obținem $2f(0) + n + 1 = n + 4049$, deci $f(0) = 2024$ 1p

Funcția cerută este $f(n) = n + 2024, \forall n \in N$ 1p

4. Demonstrați că , pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, are loc inegalitatea

$$1012 \cdot |1 + z| + |1 + z^2| + \dots + |1 + z^{2025}| \geq 2024.$$

Soluție:

Inegalitatea se mai poate scrie $|1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3| + |1 + z| + |1 + z^4| +$
 $|1 + z^5| + \dots + |1 + z| + |1 + z^{2024}| + |1 + z^{2025}| \geq 2024.$.2p

Arătăm că $|1 + z| + |1 + z^{2k}| + |1 + z^{2k+1}| \geq 2, \forall k \in \{1, 2, \dots, 1012\}.$. 1p

Avem $|1 + z| + |1 + z^{2k}| + |1 + z^{2k+1}| = |1 + z| + |1 + z^{2k}| + |-1 - z^{2k+1}| \geq |1 +$
 $z| + |1 + z^{2k} - 1 - z^{2k+1}| = |1 + z| + |z^{2k}(1 - z)| = |1 + z| + |z|^{2k} \cdot |1 - z| = |1 +$
 $z| + |1 - z| \geq |1 + z + 1 - z| = 2.$ 3p

Însumând aceste inegalități pentru orice k de la 1 la 1012 obținem inegalitatea dorită.

. 1p