

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală

8 februarie 2025

Clasa a XI-a

SUBIECTUL I:

1. a) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n - 1}{2^n + 1} \right)^{3^n}$.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt[3]{an^3 + bn^2}) = 2$.

2. a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ dacă $\begin{vmatrix} 1 & 2^x & 4^x \\ 9 & 3^{x+1} & 9^x \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

b) Fie a, b, c numere întregi. Să se arate că $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$ este divizibil cu 24.

3. Rezolvați în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ecuația $X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

G. M.

4. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = a > 0$ și $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1+2a_n^2}}$, $n \geq 1$.

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și aflați limita sa.

b) Să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n^2$.

G. M.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect este notat cu 7p.

Nu se acordă nici un punct din oficiu. Timp de lucru 3 ore.