

Olimpiada Națională de Matematică**Etapă locală****8 februarie 2025****Clasa a VI-a****Barem de notare****SUBIECTUL I**

Fie p un număr prim pentru care $p^4 - 26$ este tot un număr prim. Demonstrați că, din orice mulțime cu cel puțin șase elemente numere naturale, putem alege două a căror diferență este divizibilă cu p .

SOLUȚIE	PUNCTAJ
Pentru: $p = 2 \Rightarrow p^4 - 26 = 2^4 - 26$, (nu este număr natural) .	1p
Pentru: $p = 5 \Rightarrow p^4 - 26 = 5^4 - 26 = 599$, (număr prim) .	1p
Pentru p prim, diferit de 2 și 5 $\Rightarrow u(p) \in \{1, 3, 7, 9\} \Rightarrow u(p^2) \in \{1, 9\} \Rightarrow u(p^4) = 1 \Rightarrow u(p^4 - 26) = 5 \Rightarrow p^4 - 26 : 5 \Rightarrow p^4 - 26$ nu este prim. Prin urmare $p = 5$.	3p
Folosim acum principiul cutiei. Vom considera cutiile : $\{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $\{5p + 1 \mid p \in \mathbb{N}\}$, $\{5q + 2 \mid q \in \mathbb{N}\}$, $\{5r + 3 \mid r \in \mathbb{N}\}$ și $\{5s + 4 \mid s \in \mathbb{N}\}$. În cel mai nefavorabil caz, având 6 numere naturale și 5 cutii, vom fi obligați să alegem două elemente din aceeași cutie și astfel diferența va fi multiplu de 5, deci divizibilă cu 5.	1p 1p

SUBIECTUL II

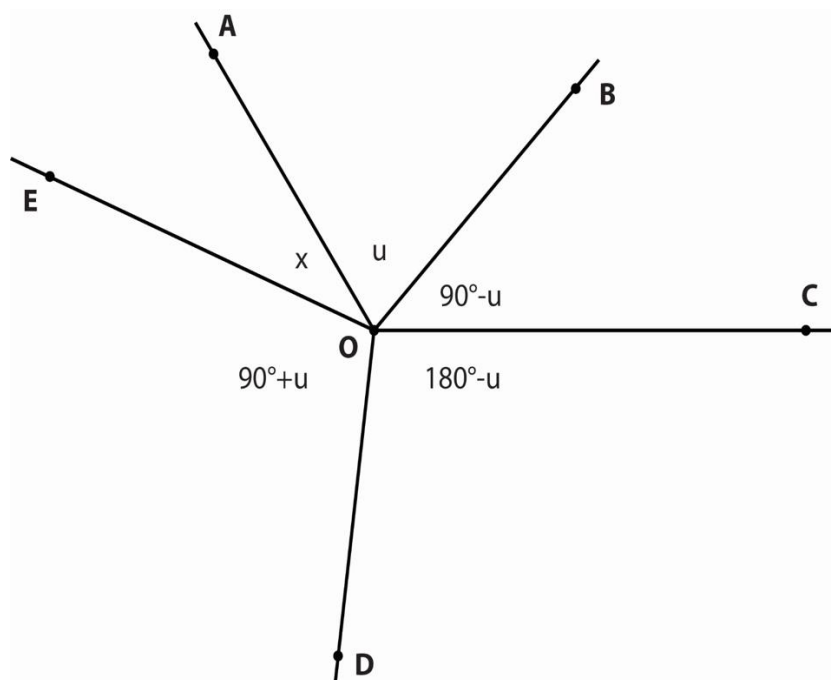
- a) Aflați m, n numere naturale astfel încât $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 57^{4m+1} = (n-1)^4$.
- b) Determinați un număr natural de patru cifre \overline{abcd} știind că sunt îndeplinite simultan condițiile : i) $(\overline{ab}, \overline{cd}) = 4$ și ii) $[\overline{ab}, \overline{cd}] = 204$.

SOLUȚIE	PUNCTAJ
a) Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6, 9 Pentru $n \geq 5$, $U(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 57^{4m+1}) = 7 \neq U[(n-1)^4]$ Deci $n \leq 4$. Analiza tuturor cazurilor Finalizare $m = 0$, $n = 4$	1p 1p 1p
b) $(\overline{ab}, \overline{cd}) = 4 \Rightarrow \overline{ab} = 4k$, $\overline{cd} = 4q$, $k, q \in \mathbb{N}$, $(k, q) = 1$ Avem $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = (\overline{ab}, \overline{cd}) \cdot [\overline{ab}, \overline{cd}] \Rightarrow \overline{ab} \cdot \overline{cd} = 816 \Rightarrow 16kq = 816 \Rightarrow kq = 51$. Atunci $(k, q) \in \{(3, 17), (17, 3)\}$ (soluția $k = 51$ nu convine) Finalizare $\overline{abcd} \in \{1268, 6812\}$	1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL III

$\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle EOA$ sunt unghiuri în jurul punctului O , astfel încât unghiul $\sphericalangle AOB$ este complementul unghiului $\sphericalangle BOC$ și este suplementul unghiului $\sphericalangle COD$, iar unghiul $\sphericalangle DOE$ este suplementul complementului unghiului $\sphericalangle AOB$. Arătați că *semidreptele OE și OA coincid* .

SOLUȚIE	PUNCTAJ
Notăm $\sphericalangle AOB = u$, iar $\sphericalangle EOA = x$. Din cerințele problemei avem $\sphericalangle BOC = 90^0 - u$	1p
și $\sphericalangle COD = 180^0 - u$	1p
și $\sphericalangle DOE = 180^0 - (90^0 - u) = 90^0 + u$	2p
Prin însumarea măsurilor unghiurilor obținem : $u + 90^0 - u + 180^0 - u + 90^0 + u + x = 360^0 \Rightarrow x = 0^0$, adică $\sphericalangle EOA = 0^0$	2p
Finalizare , deci unghiul $\sphericalangle EOA$ este nul de unde deducem că semidreptele OE și OA coincid.	1p



SUBIECTUL IV

Fie punctele coliniare A , B , C și D (în această ordine) astfel încât $AB + 2BC + 3CD = 2AD$. Determinați poziția punctului $M \in (BC)$ cu proprietatea că $AM \cdot MC = MB \cdot MD$.

SOLUȚIE	PUNCTAJ
Notăm lungimea segmentului $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.	2p
Atunci $AB + 2BC + 3CD = 2AD \Leftrightarrow a + 2b + 3c = 2(a + b + c) \Leftrightarrow a + 2b + 3c = 2a + 2b + 2c \Leftrightarrow a = c$.	2p
Notăm $MB = x$ rezultă că $MC = b - x$	
Din condiția $AM \cdot MC = MB \cdot MD \Rightarrow (a + x) \cdot (b - x) = x \cdot (c + b - x) \Rightarrow b = 2x$	2p
Finalizare , M mijlocul lui BC .	1p