

75. Országos Matematikaolimpia
Körzeti szakasz, 2025. február 15.
VIII. osztály

1. feladat. Határozd meg az a és b valós számot, ha teljesíti a

$$3a + 3b + 28 = 8\sqrt{3a + 5} + 6\sqrt{3b - 2}$$

egyenlőséget, és számítsd ki az $(a - b - 1)^{2024}$ értékét!

Gazeta Matematică

2. feladat. Tekintsük az

$$a = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2023} + \sqrt{2024}}$$

és

$$b = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024} + \sqrt{2025}}$$

számot.

a) Számítsd ki az a és b szám számtani közepét!

b) Igazold, hogy $a > 22$.

3. feladat. Adott az ABC háromszög, amelyben $AB = 1$ cm, $AC = \sqrt{2}$ cm és $BC = \sqrt{3}$ cm. A C pontból a háromszög síkjára a CM merőlegest emeljük, $CM = \sqrt{3}$ cm.

a) Igazold, hogy az ABC háromszög derékszögű!

b) Igazold, hogy BA merőleges az (ACM) síkra, és számítsd ki a BM egyenes és az (ACM) sík által alkotott szög tangensét!

c) Legyen $N \in AM$ úgy, hogy $MN = NB$. Számítsd ki az MNB háromszög területét!

4. feladat. Az $ABCD A'B'C'D'$ szabályos négyoldalú hasáb, amelynek alapja az $ABCD$ négyzet, az alapéle $AB = 4\sqrt{2}$ cm és az oldaléle $AA' = 6\sqrt{3}$ cm. Legyen az M és N pont az AB illetve BC oldal felezőpontja és $AC \cap DB = \{O\}$.

a) Igazold, hogy $A'C' \parallel (D'MN)$!

b) Számítsd ki a $(D'MN)$ és (ABC) sík által alkotott lapszög mértékét!

c) Számítsd ki a D pont $(D'MN)$ síktól való távolságát!

Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.