

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ 7.02.2025

CLASA a IX-a

Problema I. (7 puncte)

a) Demonstrați că $a^3 - 3a + 2 \geq 0, \forall a \in \mathbf{R}_+$.

b) Folosind eventual punctul a), demonstrați că $\frac{a+1}{b^3+11} + \frac{b+1}{a^3+11} \leq \frac{1}{3}, \forall a, b \in [0,1]$.

prof. Paula Balica, Școala Gimnazială „Ion Agârbiceanu” Cluj-Napoca

Problema II. (7 puncte)

Se consideră expresia $E(x) = \left\{ \frac{3x-2}{4} \right\} - \left[\frac{9x-2}{12} \right] - \left[\frac{9x+2}{12} \right] + \frac{x+1}{2}$, unde x este număr real, iar $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x , respectiv $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

a) Arătați că $E\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)$ este număr întreg.

b) Determinați soluțiile ecuației $E(x) = -\frac{7x}{4}$, unde x este număr real.

prof. Adrian-Bogdan Meseșan, Liceul Teoretic „Avram Iancu” Cluj-Napoca

Problema III. (7 puncte)

Fie AB și CD două coarde perpendiculare ale unui cerc de centru O . Dacă $AB \cap CD = \{M\}$, să se arate că pentru orice punct R din plan are loc relația

$$\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RD} = 4\overrightarrow{RP}, \text{ unde } P \text{ este mijlocul segmentului } OM.$$

prof. Camelia Maria Chindriș, Colegiul Național „Andrei Mureșanu” Dej

Problema IV. (7 puncte)

Fie triunghiul ABC având laturile $a = 4, b = 5, c = 6$. Pe laturile acestui triunghi se consideră punctele D, E, F astfel încât $\frac{BD}{DC} = k, \frac{CE}{EA} = m, \frac{AF}{FB} = n$, unde $k, m, n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Să se determine n pentru care punctele I, G și G_{DEF} sunt coliniare, unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC , G este centrul de greutate al triunghiului ABC , iar G_{DEF} este centrul de greutate al triunghiului DEF .

prof. Blaga Mirela-Gabriela, Liceul Teoretic „Alexandru Papiu Ilarian” Dej

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!