

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală 8.02.2025

Județul Buzău

CLASA a IX-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se reprezinte într-un sistem de axe xOy mulțimea

$$A = \{P(x, y) \mid |x + y| + |x - y| = 2, x, y \in R\}$$

Soluție și Barem

Dacă perechea (x, y) este soluție a ecuației $|x + y| + |x - y| = 2$ atunci și $(-x, y)$, $(x, -y)$ și $(-x, -y)$ sunt soluții ale ecuației.....2 p

Deci este suficient să rezolvăm ecuația pentru $x \geq 0, y \geq 0$ 1 p

Pentru $x \geq 0, y \geq 0, x \geq y$ ecuația $|x + y| + |x - y| = 2$ devine $x + y + x - y = 2 \Leftrightarrow x = 1$

și $y \in [0, 1]$, mulțimea soluțiilor fiind, în acest caz, $S_1 = \{(1, y) \mid y \in [0, 1]\}$1p

Pentru $x \geq 0, y \geq 0, x \leq y$ ecuația $|x + y| + |x - y| = 2$ devine $x + y - x + y = 2 \Leftrightarrow y = 1$

și $x \in [0, 1]$, mulțimea soluțiilor fiind, în acest caz, $S_2 = \{(x, 1) \mid x \in [0, 1]\}$1p

Cu observația de la începutul soluției, reprezentarea mulțimii A , într-un sistem de axe xOy ,

este un pătrat cu centrul în origine, de latură 2, având vârfurile în punctele

$M(1, 1), N(-1, 1), P(-1, -1)$ și $Q(1, -1)$2 p

Subiectul 2 (7 puncte)

Arătați că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c > 0$ și $a + b + c = 2025$ atunci

$$\frac{a}{\sqrt{2025a+bc}} + \frac{b}{\sqrt{2025b+ca}} + \frac{c}{\sqrt{2025c+ab}} \leq \frac{3}{2}$$

Soluție și Barem

Din $2025a + bc = (a + b + c) \cdot a + bc = a^2 + ab + ac + bc = (a + b)(a + c)$ 2p

și analoagele rezultă

$$A = \sqrt{\frac{a \cdot a}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{b \cdot b}{(b+c)(b+a)}} + \sqrt{\frac{c \cdot c}{(c+a)(c+b)}} \leq \dots\dots\dots 2p$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} \right) \leq \dots\dots\dots 2p$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{a+b} + \frac{a+c}{a+c} + \frac{b+c}{b+c} \right) = \frac{3}{2}. \dots\dots\dots 1p$$

S-a folosit inegalitatea $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}_+$

Subiectul 3 (7 puncte)

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\left\{ \frac{6x^2 - 11x - 10}{10x - 25} \right\} = \frac{4x - 1}{2}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului a .

Soluție și Barem

$$\left\{ \frac{6x^2 - 11x - 10}{10x - 25} \right\} = \frac{4x - 1}{2} \Leftrightarrow \left\{ \frac{(3x + 2)(2x - 5)}{5(2x - 5)} \right\} = \frac{4x - 1}{2} \Leftrightarrow \left\{ \frac{3x + 2}{5} \right\} = \frac{4x - 1}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$\left\{ \frac{3x + 2}{5} \right\} = \frac{4x - 1}{2} \Leftrightarrow \frac{3x + 2}{5} - \left[\frac{3x + 2}{5} \right] = \frac{4x - 1}{2} \Leftrightarrow \left[\frac{3x + 2}{5} \right] = \frac{-14x + 9}{10} \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{-14x + 9}{10} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{-10k + 9}{14} \Rightarrow \left[\frac{-6k + 11}{14} \right] = k \dots\dots\dots 1p$$

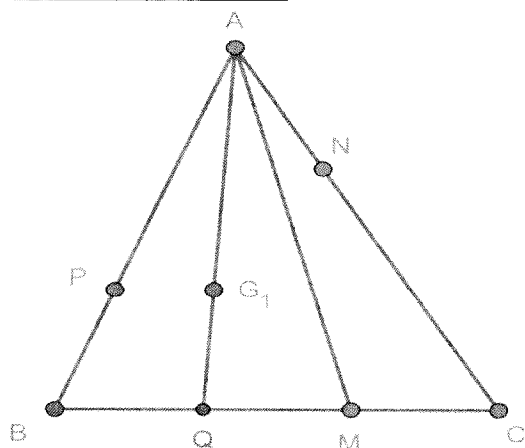
$$k \leq \frac{-6k + 11}{14} < k + 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{14} \dots\dots\dots 2p$$

Subiectul 4 (7 puncte)

Se consideră un triunghi ABC și punctele M, N, P pe laturile BC, CA , respectiv AB , astfel încât

$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}$. Notăm cu G_1, G_2 și G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMB, BCN , respectiv CAP . Demonstrați că triunghiurile $G_1G_2G_3$ și ABC au același centru de greutate.

Soluție și Barem



Fie $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k$ și Q mijlocul lui BM . Atunci $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k}$1 p

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$1 p

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}}{2} = \frac{1}{3} \left(\overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k} \right) = \frac{(k+2)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{3(k+1)}$1 p

Analog $\overrightarrow{BG_2} = \frac{(k+2)\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{BA}}{3(k+1)}$, $\overrightarrow{CG_3} = \frac{(k+2)\overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{CB}}{3(k+1)}$1 p

Triunghiurile $G_1G_2G_3$ și ABC au același centru de greutate dacă și numai dacă

$\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \vec{0}$2 p

$\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \frac{(k+2)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{3(k+1)} + \frac{(k+2)\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{BA}}{3(k+1)} + \frac{(k+2)\overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{CB}}{3(k+1)} = \frac{(k+2)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})}{3(k+1)} +$

$+\frac{k(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})}{3(k+1)} = \frac{(k+2)\vec{0} + k\vec{0}}{3(k+1)} = \vec{0}$1 p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală 8.02.2025

Județul Buzău

CLASA a X-a

Subiectul 1 (7 puncte)

- a. Fie $a, b \in (0, \infty)$. Să se arate că $a^a b^b \geq a^b b^a$.
- b. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Să se arate că $a^a b^b c^c \geq a^{\frac{b+c}{2}} b^{\frac{c+a}{2}} c^{\frac{a+b}{2}}$.

Soluție și Barem

$$\begin{aligned} \text{a. } a^a b^b \geq a^b b^a &\Leftrightarrow \lg a^a b^b \geq \lg a^b b^a \Leftrightarrow a \cdot \lg a + b \cdot \lg b \geq b \cdot \lg a + a \cdot \lg b \dots\dots\dots 1 \text{ p} \\ &\Leftrightarrow (a - b) \cdot (\lg a - \lg b) \geq 0 \dots\dots\dots 1 \text{ p} \end{aligned}$$

Inegalitatea este adevărată deoarece funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lg x$, este strict crescătoare și $a - b$ și $\lg a - \lg b$ au același semn. 1 p

b. Conform punctului a) pentru $a, b, c \in (0, \infty)$ avem inegalitățile:

$$a^a b^b \geq a^b b^a, \quad b^b c^c \geq b^c c^b, \quad c^c a^a \geq c^a a^c \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\text{Prin înmulțirea acestor inegalități rezultă: } a^{2a} b^{2b} c^{2c} \geq a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Finalizare, radical din ambii membri, pozitivi: } a^a b^b c^c \geq a^{\frac{b+c}{2}} b^{\frac{c+a}{2}} c^{\frac{a+b}{2}} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Subiectul 2 (7 puncte)

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + x}} = x$$

Soluție și Barem

Condițiile de existență ale radicalilor și de existență ale soluțiilor ecuației impun

$$x \geq 0, 2 + x \geq 0, 2 \geq \sqrt{2 + x} \Leftrightarrow x \in [0, 2] \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Prin ridicare la pătrat obținem $2 - \sqrt{2 + x} = x^2 \Leftrightarrow 2 - x^2 = \sqrt{2 + x}$.

Existența soluției impune $2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ și cum $x \in [0, 2]$ rezultă $x \in [0, \sqrt{2}]$..1 p

$$\begin{aligned} 2 - x^2 = \sqrt{2 + x} &\Leftrightarrow (2 - x^2)^2 = 2 + x \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 2)(x + 2) - \\ &-(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^3 + 2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^3 + x^2 + x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ (x - 2)[x^2(x + 1) + (x + 1)(x - 1)] &= 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1)(x^2 + x - 1) = 0 \dots\dots\dots 2 \text{ p} \end{aligned}$$

Cum $-1, 2 \notin [0, \sqrt{2}]$ rezultă $x^2 + x - 1 = 0$ cu rădăcinile $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin [0, \sqrt{2}]$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \in [0, \sqrt{2}]$ și singura soluție a ecuației este $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$2 p

Soluție alternativă și Barem

Condițiile de existență ale radicalilor și de existență ale soluțiilor ecuației impun

$$x \geq 0, 2 + x \geq 0, 2 \geq \sqrt{2 + x} \Leftrightarrow x \in [0, 2] \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Putem pune deci $x = 2 \cos t$, cu $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$1 p

$$\text{Atunci } 2 + x = 2 + 2 \cos t = 4 \cos^2 \frac{t}{2} \text{ și } 2 - \sqrt{2 + x} = 2 - 2 \cos \frac{t}{2} = 4 \sin^2 \frac{t}{4} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Egalitatea devine } 2 \sin \frac{t}{4} = 2 \cos t \Leftrightarrow \cos t - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin \frac{3t+2\pi}{8} \sin \frac{5t-2\pi}{8} = 0 \dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Din } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ rezultă } \frac{3t+2\pi}{8} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{16}] \text{ și ecuația } \sin \frac{3t+2\pi}{8} = 0 \text{ nu are soluție.} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\begin{aligned} \text{Din } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ rezultă } \frac{5t-2\pi}{8} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{16}] \text{ și ecuația } \sin \frac{5t-2\pi}{8} = 0 \text{ are soluția } t = \frac{2\pi}{5} \text{ deci ecuația} \\ \text{din enunț are soluția unică } x = 2 \cos \frac{2\pi}{5} \dots\dots\dots 1 \text{ p} \end{aligned}$$

Subiectul 3 (7 puncte)

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $z_1 \neq z_2$ cu $|z_1| = |z_2| = 1$, și $z_3 = z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2$.

- Dați un exemplu de numere $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, cu proprietățile din enunț, astfel încât $z_3 = 0$. Arătați că există o infinitate de numere complexe z_1, z_2 cu proprietățile din enunț, astfel încât $z_3 = 0$.
- Dați un exemplu de numere $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, cu proprietățile din enunț, astfel încât $|z_3| = 1$. Arătați că există o infinitate de numere complexe z_1, z_2 , cu proprietățile din enunț, astfel încât $|z_3| = 1$.
- Arătați că z_1, z_2, z_3 cu proprietățile din enunț, nu pot fi afizele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Soluție și Barem

- $|z_2| = 1 \Rightarrow z_2 \neq 0$. $z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 - \frac{z_1}{z_2} + 1 = 0$. Notând $\frac{z_1}{z_2} = \alpha$ avem $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ ecuație care are rădăcinile $\alpha = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\bar{\alpha} = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 Luând $z_2 = 1, z_1 = \alpha$, avem un exemplu de $z_3 = z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ 1 p
 Luând $z_2 \in \mathbb{C}^*, |z_2| = 1$ și avem o infinitate de astfel de numere complexe, ele fiind afizele punctelor de pe cercul cu centrul în origine și de rază 1 și $z_1 = \alpha z_2$, sau $z_1 = \bar{\alpha} z_2$ avem o infinitate de numere complexe z_1, z_2 cu proprietățile din enunț, astfel încât $z_3 = 0$1 p
- Fie $u, v \in [0, 2\pi)$, $z_1 = \cos u + i \sin u$, $z_2 = \cos v + i \sin v$, $z_3 = z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = \cos 2u + i \sin 2u - (\cos(u+v) + i \sin(u+v)) + \cos 2v + i \sin 2v =$
 $= 2\cos(u+v) \cdot \cos(u-v) + 2i \sin(u+v) \cdot \cos(u-v) - \cos(u+v) - i \sin(u+v) =$
 $= (2\cos(u-v) - 1)(\cos(u+v) + i \sin(u+v))$ 1 p
 $|z_3| = 1 \Leftrightarrow |2\cos(u-v) - 1| = 1 \Leftrightarrow 2\cos(u-v) - 1 = 1$ sau
 $2\cos(u-v) - 1 = -1$. Dacă $2\cos(u-v) - 1 = 1 \Leftrightarrow \cos(u-v) = 1 \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow z_1 = z_2$ imposibil, conform ipotezei. Rămâne că $2\cos(u-v) - 1 = -1 \Leftrightarrow \cos(u-v) = 0 \Leftrightarrow$
 $u - v \in \left\{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$. Alegem $u - v = \frac{\pi}{2}$, $u = \frac{\pi}{2}, v = 0$, $z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$, $z_2 = \cos 0 + i \sin 0$ și $|z_3| = |i^2 - i \cdot 1 + 1^2| = 1$ 1 p
 Alegem $u - v = \frac{\pi}{2}, u = v + \frac{\pi}{2}$, $z_1 = \cos\left(v + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right)$,
 $|z_3| = |z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2| = |(2\cos(u-v) - 1)| \cdot |(\cos(u+v) + i \sin(u+v))| = |-1| = 1$
 deci există o infinitate de numere complexe z_1, z_2 , cu proprietățile din enunț, astfel încât $|z_3| = 1$1 p
- Presupunem că z_1, z_2, z_3 , cu proprietățile din enunț, pot fi afizele vârfurilor unui triunghi echilateral. Fie $z_1 = \cos u + i \sin u, u \in [0, 2\pi)$, $z_2 = \cos v + i \sin v, v \in [0, 2\pi)$, $z_3 = \cos\left(u \pm \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(u \pm \frac{2\pi}{3}\right)$, $|z_3| = 1$. Ca la punctul b) obținem $u - v \in \left\{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ și pe de altă parte $u - v \in \left\{\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right\}$. Cele două mulțimi au intersecția mulțimea vidă deci z_1, z_2, z_3 nu pot fi afizele vârfurilor unui triunghi echilateral.2 p



Subiectul 4 (7 puncte)

Determinați funcțiile $f: N \rightarrow N$ cu proprietatea:

$$f(f(n+1)) = f(f(n)+1) = n+4049, \text{ pentru orice } n \in N.$$

Soluție și Barem

Fie $n_1, n_2 \in N$ astfel încât $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow f(n_1) + 1 = f(n_2) + 1 \Rightarrow f(f(n_1) + 1) = f(f(n_2) + 1) \Rightarrow n_1 + 4049 = n_2 + 4049 \Rightarrow n_1 = n_2$, deci funcția f este injectivă.....2 p

Din injectivitate și $f(f(n+1)) = f(f(n)+1)$ rezultă $f(n+1) = f(n)+1, \forall n \in N$1 p

Atunci din $f(n+1) = f(n)+1, \forall n \in N$ rezultă $f(n) = f(n-1)+1 = f(n-2)+1+1 = f(n-2)+2 = \dots = f(1)+n-1 = f(0)+n$. Deci $f(n) = f(0)+n, \forall n \in N$ 1 p

$$\text{Avem } n+4049 = f(f(n)+1) = f(0)+f(n)+1 = f(0)+f(0)+n+1 \Rightarrow$$

$$4049 = 2f(0)+1 \Rightarrow f(0) = 2024 \dots\dots\dots 2 p$$

Singura funcție care verifică enunțul este $f: N \rightarrow N, f(n) = 2024+n$1 p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală 8.02.2025

Județul Buzău

CLASA a XI-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se calculeze limita: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot a_n}{2 \cdot 1 + 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 3^2 + \dots + (3n-1) \cdot n^2}$, unde

$$a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \dots + n \sin nx}{x}.$$

Soluție și Barem

$$\begin{aligned} a_n &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \dots + n \sin nx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + 2^2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} + \dots + n^2 \cdot \frac{\sin nx}{nx} \right) = \\ &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \dots\dots\dots 3p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 3^2 + \dots + (3n-1) \cdot n^2 &= \sum_{k=1}^n (3k-1) \cdot k^2 = 3 \cdot \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k^2 = \\ &= 3 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(9n^2+5n-2)}{12}. \dots\dots\dots 3p \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot a_n}{2 \cdot 1 + 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 3^2 + \dots + (3n-1) \cdot n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (4n+2)}{9n^2+5n-2} = \frac{4}{9}. \dots\dots\dots 1p$$



Subiectul 2 (7 puncte)

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2025 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația $X^{2024} + X = A$, unde $X \in M_2(R)$.

Soluție și Barem

Deoarece $(X^{2024} + X) \cdot X = X \cdot (X^{2024} + X) \Rightarrow A \cdot X = X \cdot A$ (*). 1p

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in R$, o soluție. Din (*) rezultă

$$\begin{pmatrix} 2a + 2025c & 2b + 2025d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b + 2025a \\ 2c & 2025 + 2d \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2p$$

de unde rezultă $c = 0$ și $d = a$, deci $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ 1p

iar prin inducție, $X^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$, deci $X^{2024} = \begin{pmatrix} a^{2024} & 2024a^{2023}b \\ 0 & a^{2024} \end{pmatrix}$ 1p

Cum $X^{2024} + X = A$ rezultă $a^{2024} + a = 2 \Rightarrow a = 1$ și $2024a^{2023}b + b = 2025$ adică $b = 1$.

Așadar, $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2p

Subiectul 3 (7 puncte)

Determinați toate matricele $A \in M_2(R)$ cu proprietatea că $A^3 = \begin{pmatrix} 19 & 30 \\ -45 & -71 \end{pmatrix}$.

Soluție și Barem

Avem $\det(A^3) = \begin{vmatrix} 19 & 30 \\ -45 & -71 \end{vmatrix} = 19 \cdot 71 + 45 \cdot 30 = -1349 + 1350 = 1 \Leftrightarrow (\det A)^3 = 1$ și cum

$\det A \in R$ rezultă $\det A = 1$1 p

Conform Teoremei Hamilton- Cayley avem $A^2 - t \cdot A + (\det A) \cdot I_2 = O_2$, unde $t = \text{Tr}(A)$ este urma matricei A . Rezultă $A^2 = t \cdot A - I_2$1 p

$A^3 = t \cdot A^2 - A = t \cdot (t \cdot A - I_2) - A = (t^2 - 1) \cdot A - t \cdot I_2$1 p

Atunci $19 - 71 = \text{Tr}(A^3) = \text{Tr}((t^2 - 1) \cdot A - t \cdot I_2) = \text{Tr}((t^2 - 1) \cdot A) - \text{Tr}(t \cdot I_2) = (t^2 - 1) \cdot \text{Tr}(A) - t \cdot \text{Tr}(I_2) = (t^2 - 1) \cdot t - t \cdot 2 = t^3 - 3 \cdot t \Leftrightarrow t^3 - 3 \cdot t + 52 = 0$2 p

$t^3 - 3 \cdot t + 52 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 64 - 3 \cdot t - 12 = 0 \Leftrightarrow (t + 4) \cdot ((t - 2)^2 + 9) = 0$. Cum

$(t - 2)^2 + 9 \neq 0, \forall t \in R$ rezultă $t = -4$1 p

Din $\begin{pmatrix} 19 & 30 \\ -45 & -71 \end{pmatrix} = A^3 = (t^2 - 1) \cdot A - t \cdot I_2 = 15 \cdot A + 4 \cdot I_2$ rezultă

$A = \frac{1}{15} \left(\begin{pmatrix} 19 & 30 \\ -45 & -71 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$1 p

Subiectul 4 (7 puncte)

Determinați cel mai mic număr $k \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\sqrt{3} + \sqrt[3]{3^2} + \sqrt[4]{3^3} + \dots + \sqrt[n]{3^{n-1}} < k(n-1) \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq 2.$$

Soluție și Barem

Relația din enunț se mai scrie: $\frac{\sqrt{3} + \sqrt[3]{3^2} + \sqrt[4]{3^3} + \dots + \sqrt[n]{3^{n-1}}}{n-1} < k, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

Considerăm șirurile $(x_n)_{n \geq 2}$ și $(y_n)_{n \geq 2}$, unde $x_n = \sqrt[n]{3^{n-1}}$ și $y_n = \frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n-1}$1 p

Deoarece $\frac{(n+1)-1}{n+1} \geq \frac{n-1}{n} \Leftrightarrow n^2 > n^2 - 1$, șirul $(x_n)_{n \geq 2}, x_n = \sqrt[n]{3^{n-1}} = 3^{\frac{n-1}{n}}$ este strict crescător. 1 p

$$y_{n+1} - y_n = \frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n} - \frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n-1} = \frac{(n-1)x_{n+1} - x_2 - x_3 - \dots - x_n}{n(n-1)} =$$

$$\frac{x_{n+1} - x_2 + x_{n+1} - x_3 + \dots + x_{n+1} - x_n}{n(n-1)} > 0, \text{ deci și șirul și } (y_n)_{n \geq 2}, y_n = \frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n-1} \text{ este strict crescător.1 p}$$

$$\text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{n-1}{n}} = 3^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n}} = 3. \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Cu Teorema lui Cesaro-Stolz avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}) - (x_2 + x_3 + \dots + x_n)}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = 3. \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Rezultă $k \geq 3$ și cel mai mic număr $k \in \mathbb{R}$ astfel încât relația din enunț să fie adevărată este 3.1 p



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

Județul Buzău

CLASA a XII-a

Problema 1

Fie (G, \cdot) un grup multiplicativ cu elementul neutru $e \in G$. Dacă $a, b \in G$ cu proprietățile $a^3 = e$ și $a^2ba^{-2} = b^4$, arătați că $b^{63} = e$.

Soluție și barem orientativ

$$a^2ba^{-2} = b^4 \Rightarrow a^2b = b^4a^2 \Rightarrow a^3b = ab^4a^2 \Rightarrow b = ab^4a^2 \Rightarrow ba = ab^4 \Rightarrow \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\Rightarrow b^2a = bba = b(ba) = b(ab^4) = (ba)b^4 = ab^4b^4 = ab^8 \Rightarrow \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$b^4a = ab^{16} \Rightarrow b^8a = ab^{32} \Rightarrow b^{16}a = ab^{64} \Rightarrow \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\Rightarrow a(b^{16}a) = a^2b^{64} \Rightarrow (ab^{16})a = a^2b^{64} \Rightarrow (b^4a)a = a^2b^{64} \Rightarrow b^4a^2 = a^2b^{64} \Rightarrow a^2b = a^2b^{64} \Rightarrow b = b^{64} \Rightarrow b^{63} = e$$

$$\dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$



Problema 2

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata bijectivă. Arătați că inversa funcției f' admite primitive.

Soluție și barem orientativ

Dacă f este derivabilă atunci f' are proprietatea lui Darboux.....1 punct
 f' are proprietatea lui Darboux și este și injectivă rezultă că f' este strict monotonă ...2 punct
 f' este strict monotonă și este și surjectivă rezultă că f' este continuă2 punct
 f' este strict continuă și este și bijectivă rezultă că $(f')^{-1}$ este continuă și bijectivă....1 punct
 $(f')^{-1}$ este continuă deci $(f')^{-1}$ are primitive.....1 punct

Problema 3

Să se calculeze $\int_0^1 \frac{1}{2^{2x-1} + 1} dx$.

Soluție și barem orientativ

Notând

$$\begin{aligned} t = 1 - x &\Rightarrow dx = -dt, \\ x = 0 &\Rightarrow t = 1, \\ x = 1 &\Rightarrow t = 0 \end{aligned} \quad \text{și cu } I = \int_0^1 \frac{1}{2^{2x-1} + 1} dx \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\text{obținem: } I = \int_0^1 \frac{1}{2^{2x-1} + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{2^{2(1-t)-1} + 1} dt = \int_0^1 \frac{1}{2^{1-2t} + 1} dt = \int_0^1 \frac{2^{2t-1}}{1 + 2^{2t-1}} dt \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$I + I = \int_0^1 \frac{1}{2^{2x-1} + 1} dx + \int_0^1 \frac{2^{2x-1}}{1 + 2^{2x-1}} dx = \int_0^1 1 dx = 1 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$



Problema 4

Fie G un grup comutativ finit cu elementul neutru e . Dacă $x^2 = e$ pentru mai mult de jumătate din elementele grupului, atunci $x^2 = e$ pentru orice element $x \in G$.

Soluție și barem orientativ

Notăm cu H mulțimea acelor elemente pentru care se verifică egalitatea din ipoteză,
 $H = \{x \in G / x^2 = e\}$ și demonstrăm că $(H, \cdot) \leq (G, \cdot)$1 punct

Avem:

1. $H \neq \Phi$ deoarece $e \in H$.

2. Dacă $x^2 = y^2 = e \Rightarrow (xy^{-1})^2 = x^2 (y^{-1})^2 = x^2 (y^2)^{-1} = e \cdot e = e \Rightarrow xy^{-1} \in H$ și deci
 $(H, \cdot) \leq (G, \cdot)$3 puncte

Dacă notăm cu n ordinul grupului G și cu k ordinul subgrupului H , rezultă din ipoteză că
 $k > \frac{n}{2} \Rightarrow n < 2k$1 punct

Conform teoremei lui Lagrange $k/n \Rightarrow (\exists)p \in \mathbb{N}$ cu $n = pk$. Rezultă
 $pk = n < 2k \Rightarrow p = 1 \Rightarrow k = n \Rightarrow H = G$ și deci relația este verificată de toate elementele din G
.....2 puncte