



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2025
CLASA A X-A

SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

Problema 1. Demonstrați că ${}^{n-2}\sqrt{\log_3(n+1)} < \frac{3}{2}$, oricare ar fi numărul natural $n \geq 4$.

prof. Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Soluție.

Inegalitatea este echivalentă cu $3^{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}} > n+1, \forall n \geq 4$ natural.

Se demonstrează prin inducție matematică $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{2}$ oricare ar fi $n \geq 1$ 3 punct

Rezultă $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{n-2} \geq 1 + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2}$, 1 punct

este suficient să arătăm că $3^{\frac{n}{2}} > n+1, \forall n \geq 4$,

adică $3^n > (n+1)^2, \forall n \geq 4$, ceea ce se probează inductiv. 3 puncte

Problema 2. Rezolvați în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația $x^3 + x^2 + x = (x+1)(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}$.

prof George-Florin Șerban, Brăila

Soluție. $\frac{x^3 + x^2 + x}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+2)\sqrt{y+1}, \frac{x^3}{(x+1)\sqrt{x+1}} + \frac{x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+1)\sqrt{y+1} + \sqrt{y+1},$

$\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3 + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = (\sqrt{y+1})^3 + \sqrt{y+1}, \dots\dots\dots 2 \text{ pct}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = t^3 + t$, este strict crescătoare pe \mathbb{R} , deci este injectivă, $f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f(\sqrt{y+1})$

rezultă $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}, \frac{x^2}{x+1} = y+1, \dots\dots\dots 2 \text{ pct}$

$x-1 + \frac{1}{x+1} = y+1$, deci $\frac{1}{x+1} \in \mathbb{Z}, x \in \{-2, 0\}. \dots\dots\dots 2 \text{ pct}$

Dacă $x = -2$ rezultă $y = -5, -6 = 3\sqrt{4} = 6$ fals.

Dacă $x = 0$ rezultă $y = -1, 0 = 0$, adevărat, $S = \{(0, -1)\}. \dots\dots\dots 1 \text{ pct}$

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Arătați că $\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

Gazeta Matematică nr 9/2024

Soluție. Aplicăm inegalitatea mediilor, $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{n \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-1}} \leq \frac{n+n-1}{n} = 1 + \frac{n-1}{n}. \dots\dots\dots 2 \text{ pct.}$



Este suficient să demonstrăm că $1 + \frac{n-1}{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, $\frac{n-1}{n} < \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, $\sqrt[n]{2} < \frac{n}{n-1}$, 3 pct

$\sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{\underbrace{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-1}} \leq \frac{2+n-1}{n} = \frac{n+1}{n}$. Este suficient să demonstrăm că $\frac{n+1}{n} < \frac{n}{n-1}$, rezultă

$n^2 - 1 < n^2$, adevărat, deci $\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ 2 pct.

Problema 4. Se consideră numerele complexe nenule $z_1, z_2, \dots, z_{2028}$ cu proprietatea că $2z_{k+1} + \frac{1}{2z_k} = 1$,

pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, 2027\}$. Arătați că $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \dots \cdot z_{2028}$ este un număr rațional pozitiv.

prof. Costel Cerchez, Brăila

Soluție.

$z_{k+1} = \frac{2z_k - 1}{4z_k}$ pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, 2027\}$ 1 punct

$z_{k+2} = \frac{2z_{k+1} - 1}{4z_{k+1}} = -\frac{1}{4z_k - 2}$ pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, 2026\}$ 2 puncte

$z_{k+3} = -\frac{1}{4z_{k+1} - 2} = z_k$ pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, 2025\}$ 2 puncte

$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \dots \cdot z_{2028} = (z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)^{676} =$
 $= \left[z_1 \cdot \frac{2z_1 - 1}{4z_1} \cdot \left(-\frac{1}{4z_1 - 2} \right) \right]^{676} = \left(-\frac{1}{8} \right)^{676} = \left(-\frac{1}{2^3} \right)^{676} = \left(\frac{1}{2} \right)^{2028} \dots$ 2 puncte

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.