



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ – 2025  
CLASA a VII a

SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

**Problema 1**

a) Demonstrați că  $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ .

b) Determinați numerele  $a, b \in \mathbb{Q}$  care verifică egalitatea  $|1-a| \cdot \sqrt{5} - (\sqrt{5}+1)^{-1} = |b-2| + 3 \cdot \sqrt{9-4\sqrt{5}}$

prof. Daniela Tilincă și prof. Adriana Mihăilă, Brăila

**Soluție:**

a) Se presupune prin absurd că  $\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ ,  $(m, n) = 1$  ..... 1 punct

$$5 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow 5n^2 = m^2 \Rightarrow m:5 \Rightarrow m = 5k, k \in \mathbb{Z}, 25k^2 = 5n^2 \Rightarrow n^2:5 \Rightarrow n:5 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Rezultă că  $5|m$  și  $5|n \Rightarrow 5|(m, n)$ , dar  $(m, n) = 1 \Rightarrow 5|1$ , contradicție  $\Rightarrow \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$  ..... 1 punct

$$b) |1-a| \cdot \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} = |b-2| + 3\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$(4|1-a|-13) \cdot \sqrt{5} + 25 - 4|b-2| = 0, a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow 4|1-a|-13 = 0 \text{ și } 25 - 4|b-2| = 0 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$|1-a| = \frac{13}{4} \Rightarrow a = -\frac{9}{4} \text{ sau } a = \frac{17}{4} \text{ și } |b-2| = \frac{25}{4} \Rightarrow b = \frac{33}{4} \text{ sau } b = -\frac{17}{4} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

**Problema 2.**

Aflați toate numerele naturale de forma  $\overline{abcd}$  care verifică condițiile:  $\sqrt{\frac{abcd}{cd}} = s$ ,  $\frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} = \overline{0,0s}$ , unde  $s = a+b+c+d$ .

prof. George-Florin Șerban, Brăila

**Soluție:**

$$\text{Se notează } \overline{ab} = x, \overline{cd} = y. \text{ Din } \frac{100x}{y} + 1 = s^2, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{s}{100}, \text{ se obține } \frac{-100x}{x} - \frac{100x}{y} = \frac{-100xs}{100},$$

$$-99 = s^2 - sx, x = \frac{s^2 + 99}{s} = s + \frac{99}{s} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$x = s + \frac{99}{s} \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}, \text{ deci } \frac{3^2 \cdot 11}{s} \in \mathbb{N}, s \text{ cifră, rezultă } s \in \{1, 3, 9\} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Dacă  $s = 1$ , fals deoarece  $s \geq 2$  ..... 1 punct

$$\text{Dacă } s = 3, \text{ rezultă } x = 36, \frac{3600}{y} = 8, y = 450 \text{ fals, deoarece } y \leq 99; \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$



Dacă  $s = 9$ , rezultă  $x = 20$ ,  $\frac{2000}{y} = 80$ ,  $y = 25$ ,  $\overline{abcd} = 2025$ . .....1 punct

**Problema 3.**

Se consideră triunghiul echilateral  $ABC$ . În exteriorul lui se construiește triunghiul isoscel  $ADC$  cu  $\sphericalangle ADC = 120^\circ$ . Dacă  $E \in (AC)$  astfel încât  $DE \parallel BC$ , atunci arătați că  $DE = \frac{AC}{3}$ .

*Gazeta Matematică nr. 9/2024*

Soluție:

$\sphericalangle BCD = 90^\circ \Rightarrow BC \perp CD$ , dar  $DE \parallel BC \Rightarrow DE \perp CD$  .....2 puncte

$\triangle DEC : \sphericalangle CDE = 90^\circ, \sphericalangle DCE = 30^\circ \Rightarrow DE = \frac{EC}{2}$ ,  $\triangle AED$  – isoscel  $\Rightarrow ED = EA$  .....3 puncte

$AC = AE + EC = DE + 2DE = 3DE \Rightarrow DE = \frac{AC}{3}$  .....2 puncte

**Problema 4** Fie un trapez dreptunghic circumscris unui cerc. Dacă lungimile bazelor sunt egale cu 12 cm, respectiv 24 cm, să se afle aria patrulaterului ale cărui vârfuri sunt punctele de tangență.

*prof. Mirela Mihaela Tarța, Brăila*

Soluție:

$ABCD$ -trapez,  $AB \parallel CD, AB < CD, \sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$ , cercul  $C(O, r)$  înscris în trapez și punctele de tangență  $M \in AB, N \in BC, P \in CD, Q \in AD$ .

$AD = 2r, AM = AQ = r, DQ = DP = r, MB = BN, CN = CP$  .....1 punct

$AB + DC = AD + BC = 36 \text{ cm}$  .....1 punct

$BE \perp DC, E \in DC, \triangle BEC : \sphericalangle E = 90^\circ, EC^2 = BC^2 - EB^2 \Rightarrow 144 = (BC - BE)(BC + BE) \Rightarrow BC - BE = 4 \text{ cm}$   
 $BE = 16 \text{ cm}, r = 8 \text{ cm}, MB = 4 \text{ cm}, PC = 16 \text{ cm}$ . .....2 puncte

$\triangle MOB : \sphericalangle M = 90^\circ, OB^2 = MO^2 + MB^2 \Rightarrow OB = 4\sqrt{5} \text{ cm}, MN = 2 \cdot \frac{MB \cdot MO}{OB} = \frac{16\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$ ..... ..1 punct

$\triangle POC : \sphericalangle P = 90^\circ, OC^2 = PO^2 + PC^2 \Rightarrow OC = 8\sqrt{5} \text{ cm}, PN = 2 \cdot \frac{PC \cdot PO}{OC} = \frac{32\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$ ... .....1 punct

$A_{MNPQ} = A_{\triangle MQP} + A_{\triangle MNP} = \frac{QO \cdot MP}{2} + \frac{MN \cdot NP}{2} = 64 + \frac{256}{5} = \frac{576}{5} \text{ cm}^2$ . .....1 punct

**Notă:** Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.