



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2025
CLASA A VIII-A

SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

Problema 1.

Arătați că $24\sqrt{2} \leq \left(x + \frac{6}{x}\right)\left(y + \frac{12}{y}\right) \leq 35$, pentru orice numere reale $x \in [2, 3]$ și $y \in [3, 4]$.

Supliment Gazeta Matematică nr 9/2024

Soluție. Aplicăm inegalitatea mediilor, $M_a \geq M_g$, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$,

$$\left(x + \frac{6}{x}\right)\left(y + \frac{12}{y}\right) \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{6}{x}} \cdot 2\sqrt{y \cdot \frac{12}{y}} = 4\sqrt{72} = 4 \cdot 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}, \text{ rezultă}$$

$$\left(x + \frac{6}{x}\right)\left(y + \frac{12}{y}\right) \geq 24\sqrt{2}, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ pct.}$$

$$x \in [2, 3], 2 \leq x \leq 3, x-2 \geq 0, x-3 \leq 0, (x-2)(x-3) \leq 0, x^2 - 5x + 6 \leq 0, x-5 + \frac{6}{x} \leq 0, \text{ rezultă}$$

$$0 < x + \frac{6}{x} \leq 5, y \in [3, 4], 3 \leq y \leq 4, y-3 \geq 0, y-4 \leq 0, (y-3)(y-4) \leq 0, y^2 - 7y + 12 \leq 0, y-7 + \frac{12}{y} \leq 0,$$

$$\text{rezultă } 0 < y + \frac{12}{y} \leq 7, \text{ deci } \left(x + \frac{6}{x}\right)\left(y + \frac{12}{y}\right) \leq 5 \cdot 7 = 35, \left(x + \frac{6}{x}\right)\left(y + \frac{12}{y}\right) \leq 35. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ pct.}$$

$$\text{În concluzie } 24\sqrt{2} \leq \left(x + \frac{6}{x}\right)\left(y + \frac{12}{y}\right) \leq 35, (\forall)x \in [2, 3], (\forall)y \in [3, 4]. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ pct.}$$

Problema 2.

$$\text{Rezolvați în } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ sistemul de ecuații: } \begin{cases} x^2 + 36y^2 + z^2 + 12xy + 12yz + 2xz + 2x + 12y + 2z = 2024 \\ x^2 - y^2 + z^2 + 2xz - 90y = 2025 \end{cases}$$

prof. George-Florin Șerban, Brăila

$$\text{Soluție. } (x+z)^2 - (y+45)^2 = 0, (x+y+z+45)(x-y+z-45) = 0, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$(x+6y+z)^2 + 2(x+6y+z) - 2024 = 0, (x+6y+z)^2 + 2(x+6y+z) + 1 - 2025 = 0,$$

$$(x+6y+z+1)^2 - 45^2 = 0, (x+6y+z+46)(x+6y+z-44) = 0. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\text{Dacă } x+y+z+45=0 \text{ și } x+6y+z+46=0, \text{ le scădem, } y = -\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}.$$

Dacă $x + y + z + 45 = 0$ și $x + 6y + z - 44 = 0$, le scădem, $y = \frac{89}{5} \notin \mathbb{Z}$.

Dacă $x - y + z - 45 = 0$ și $x + 6y + z - 44 = 0$, le scădem, $y = -\frac{1}{7} \notin \mathbb{Z}$.

Dacă $x - y + z - 45 = 0$ și $x + 6y + z + 46 = 0$, le scădem, $y = -13 \in \mathbb{Z}$, $x + z = 32$, 2 puncte

Rezultă $S = \{(x, -13, 32 - x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ 1 punct

Problema 3.

Fie triunghiul ABC ale cărui laturi sunt a, b, c . Determinați aria triunghiului ABC și măsura unghiului C dacă a, b, c verifică relația :

$$\sqrt{a^2 - 16a\sqrt{3} + 196} + \sqrt{b^2 - 24b\sqrt{6} + 880} + \sqrt{c^2 - 8c\sqrt{30} + 505} \leq 11$$

prof. Daniela Tilincă și prof. Adriana Mihăilă, Brăila.

Soluție. $\sqrt{a^2 - 16a\sqrt{3} + 196} + \sqrt{b^2 - 24b\sqrt{6} + 880} + \sqrt{c^2 - 8c\sqrt{30} + 505} =$

$$\sqrt{(a - 8\sqrt{3})^2 + 4} + \sqrt{(b - 12\sqrt{6})^2 + 16} + \sqrt{(c - 4\sqrt{30})^2 + 25} \geq 2 + 4 + 5 = 11 \Rightarrow \text{..... 2 puncte}$$

$$a = 8\sqrt{3}; b = 12\sqrt{6}; c = 4\sqrt{30} \text{ 1 punct}$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow p = 4\sqrt{3} + 6\sqrt{6} + 2\sqrt{30} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{(4\sqrt{3} + 6\sqrt{6} + 2\sqrt{30})(4\sqrt{3} + 6\sqrt{6} - 2\sqrt{30})(4\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 2\sqrt{30})(-4\sqrt{3} + 6\sqrt{6} + 2\sqrt{30})} =$$

$$\sqrt{[(6\sqrt{6} + 2\sqrt{30})^2 - (4\sqrt{3})^2][(4\sqrt{3})^2 - (6\sqrt{6} - 2\sqrt{30})^2]} = \sqrt{(288 + 144\sqrt{5})(144\sqrt{5} - 288)} = 144 \Rightarrow$$

..... 2 puncte

$$A = \frac{b \cdot a \sin C}{2} \Rightarrow 144 = \frac{8\sqrt{3} \cdot 12\sqrt{6} \sin C}{2} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle C) = 45^\circ \text{ 2 puncte}$$

Problema 4.

Se dă piramida patrulateră regulată $[VABCD]$, $AC \cap BD = \{O\}$ cu $AB = 20$ cm și $VO = 10\sqrt{10}$ cm. Fie M mijlocul muchiei $[VD]$, P un punct astfel încât $B \in (DP)$ cu $DB = 2BP$ și $VB \cap MP = \{N\}$.

a) Să se demonstreze că $MN \perp VD$.

b) Dacă d este paralela dusă prin punctul P la AC , demonstrați că VD este perpendiculară pe planul determinat de MN și dreapta d .

c) Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$ știind că $\frac{VN}{AB} = a + b\sqrt{3}$.

prof. Gabriel Daniilescu, Brăila



Soluție. a) $BD = 20\sqrt{2}$, rezultă $DO = OB = BP = 10\sqrt{2}$. În $\triangle VOP$, dreptunghic, T. Pitagora,

$$VP^2 = VO^2 + OP^2 = (10\sqrt{10})^2 + (20\sqrt{2})^2 = 1800, VP = 30\sqrt{2} \Rightarrow VP = DP \Rightarrow \triangle PVD \text{ isoscel} \Rightarrow \text{mediană}$$

PM este și înălțime $\Rightarrow PM \perp VD \Rightarrow MN \perp VD$ 2 puncte

b) $AC \perp DO, AC \perp VO \Rightarrow AC \perp (VOD), VD \subset (VOD) \Rightarrow AC \perp VD, d \parallel AC \Rightarrow VD \perp d, VD \perp MN$
 $\Rightarrow VD \perp (MN, d)$ 2 puncte

c) MO linie mijlocie în $\triangle DVB \Rightarrow MO \parallel VB, MO = \frac{VB}{2}$. NB linie mijlocie în

$$\triangle PMO \Rightarrow NB = \frac{MO}{2} = \frac{VB}{4} \Rightarrow VN = \frac{3VB}{4}. \text{În } \triangle VOB \text{ dreptunghic, T. Pitagora, } VB^2 = VO^2 + OB^2,$$

$$VB^2 = (10\sqrt{10})^2 + (10\sqrt{2})^2 = 1200, VB = 20\sqrt{3} \Rightarrow VN = \frac{3 \cdot 20\sqrt{3}}{4} = 15\sqrt{3}, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\frac{VN}{AB} = \frac{15\sqrt{3}}{20} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3}, \Rightarrow a + b\sqrt{3} = \frac{3}{4}\sqrt{3} \Rightarrow a = 0 \in \mathbb{Q}, b = \frac{3}{4} \in \mathbb{Q}. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct.}$$

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.