



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2025
CLASA A XII-A

SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

Problema 1.

Fie (G, \cdot) un grup necomutativ și $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \text{ oricare ar fi } y \in G\}$, centrul său. Dacă a și b sunt două elemente din G cu proprietatea că $acb = bca$, pentru orice $c \in G \setminus Z(G)$ demonstrați că $ab = ba$.

Gazeta Matematică

Soluție:

1. Dacă $a^{-1}b^{-1} \notin Z(G)$, pentru $c = a^{-1}b^{-1}$, din ipoteză avem că $a(a^{-1}b^{-1})b = b(a^{-1}b^{-1})a$, adică

$$e = ba^{-1}b^{-1}a. \text{ Deducem că } b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1} \Rightarrow ab = ba. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$$

2. Dacă $a^{-1}b^{-1} \in Z(G) \Rightarrow (a^{-1}b^{-1})b = b(a^{-1}b^{-1}) \Rightarrow a^{-1} = ba^{-1}b^{-1}$. Atunci

$$a = (ba^{-1}b^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1}b^{-1} = bab^{-1}, \text{ deci } ab = (bab^{-1})b = ba. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ puncte}$$

Problema 2.

Calculați $\int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{2024 + \sin^2 x} dx$.

prof. Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

$$y = \pi - x \Rightarrow dy = -dx; x = 0 \Rightarrow y = \pi; x = \pi \Rightarrow y = 0$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{2024 + \sin^2 x} dx = -\int_{\pi}^0 \frac{(\pi - y) \cdot \sin(\pi - y)}{2024 + \sin^2(\pi - y)} dy = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - y) \cdot \sin y}{2024 + \sin^2 y} dy = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2024 + \sin^2 y} dy - \\ & - \int_0^{\pi} \frac{y \cdot \sin y}{2024 + \sin^2 y} dy \Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2024 + \sin^2 y} dy \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2025 - \cos^2 y} dy. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ puncte} \end{aligned}$$

$$\cos y = t \Rightarrow \sin y dy = -dt; y = 0 \Rightarrow t = 1; y = \pi \Rightarrow t = -1.$$

$$I = -\frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{dt}{2025 - t^2} dt = -\frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2 - 2025} dt = -\frac{\pi}{2 \cdot 2 \cdot 45} \ln \left| \frac{t - 45}{t + 45} \right| \Big|_{-1}^1 = -\frac{\pi}{180} \left(\ln \frac{44}{46} - \ln \frac{46}{44} \right) = \frac{\pi}{90} \ln \frac{23}{22}.$$

$\dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$

Problema 3.

Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție “ $*$ ”, astfel încât $x * \frac{1}{y} = y(x * y)$,

$$x * \frac{45}{y} = \frac{y}{\sqrt{45}}(x * y) \text{ și } (x * y)(x * 2025y) = \frac{(x+1)^2}{180xy}, \text{ oricare ar fi } x, y \in M.$$

a) Să se studieze asociativitatea, comutativitatea și existența elementului neutru pentru legea de compoziție “ $*$ ”.

b) Să se determine $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $45(x * 2025) \in \mathbb{N}^*$.

prof. Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție:

a) În relația $x * \frac{45}{y} = \frac{y}{\sqrt{45}}(x * y)$, oricare ar fi $x, y \in M$, facem $y \rightarrow 45y \Rightarrow x * \frac{1}{y} = \frac{45y}{\sqrt{45}}(x * 45y) \Rightarrow$
 $\Rightarrow y(x * y) = \sqrt{45}y(x * 45y) \Rightarrow x * y = \sqrt{45} * (x * 45y)$ oricare ar fi $x, y \in M$ 1 punct

$$\text{Apoi facem iar } y \rightarrow 45y \Rightarrow x * 45y = \sqrt{45}(x * 2025y) \Rightarrow x * y = 45(x * 2025y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x * 2025y = \frac{1}{45}(x * y) \Rightarrow (x * y) * (x * 2025y) = \frac{1}{45}(x * y)^2 \Rightarrow \frac{1}{45}(x * y)^2 = \frac{(x+1)^2}{180xy} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x * y)^2 = \frac{(x+1)^2}{4xy} \Leftrightarrow x * y = \frac{x+1}{2\sqrt{xy}}, \forall x, y \in M. \text{ 1 punct}$$

$$\text{Avem } 1 * 1 = \frac{1+1}{2 \cdot \sqrt{1 \cdot 1}} = \frac{2}{2} = 1 \text{ și } (1 * 1) * 4 = 1 * 4 = \frac{1+1}{2 \cdot \sqrt{1 \cdot 4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Apoi } 1 * (1 * 4) = 1 * \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2 \cdot \sqrt{1 \cdot \frac{1}{2}}} = \sqrt{2}, \text{ deci legea nu este asociativă.} \text{ 1 punct}$$

În plus, dacă presupunem $1 * 2 = 2 * 1 \Leftrightarrow \frac{1+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2+1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2 = 3$, ceea ce evident este fals, de unde rezultă că legea nu este nici comutativă. 1 punct

$$\text{Dacă } \exists e \in M \text{ astfel încât } x * e = e * x = x, \forall x \in M, \text{ atunci } 1 * e = 1 \Leftrightarrow \frac{1+1}{2\sqrt{e}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{2\sqrt{e}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e} = 1 \Leftrightarrow e = 1 \Rightarrow 1 * x = x, \forall x \in M \Rightarrow 1 * 4 = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 4, \text{ ceea ce este fals.}$$

Deci legea nu admite nici element neutru. 1 punct

$$\text{b) } 45(x * 2025) = 45 \frac{x+1}{2\sqrt{x \cdot 2025}} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{x+1}{2\sqrt{x}} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4x} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 4 \cdot \frac{(x+1)^2}{4x} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow x + 2 + \frac{1}{x} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ care verifică egalitatea } \frac{x+1}{2\sqrt{x}} \in \mathbb{N}^*. \text{ Deci, } x = 1. \text{ 2 puncte}$$

Problema 4.

a) Calculați $I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^4 + 3x^2 + 2)(e^x + 1)} dx$.

b) Pentru fiecare număr natural nenul n , considerăm numărul $I_n = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^n}{2^n (x^4 + 3x^2 + 2)(e^x + 1)} dx$.

Aflați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

prof. Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

a) Notăm $y = -x \Rightarrow dx = -dy$; $x = -y$; $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow y = -\sqrt{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^4 + 3x^2 + 2)(e^x + 1)} dx = - \int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} \frac{dy}{(y^4 + 3y^2 + 2)(e^{-y} + 1)} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{e^y dy}{(y^4 + 3y^2 + 2)(e^y + 1)} \dots 1 \text{ pct.}$$

$$2 \cdot I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{(x^4 + 3x^2 + 2)(e^x + 1)} + \frac{e^x}{(x^4 + 3x^2 + 2)(e^x + 1)} \right] dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\frac{e^x + 1}{(x^4 + 3x^2 + 2)(e^x + 1)} \right] dx = \dots 1 \text{ pct.}$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^4 + 3x^2 + 2)} dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{(x^2 + 1)} - \frac{1}{(x^2 + 2)} \right] dx = \dots 1 \text{ pct.}$$

$$= \arctg x \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \underbrace{\arctg \sqrt{3}}_{\frac{\pi}{3}} - \underbrace{\arctg(-\sqrt{3})}_{-\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\arctg \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}_{-\arctg \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \arctg \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{2} \cdot \arctg \frac{\sqrt{6}}{2}. \dots 1 \text{ pct.}$$

$$\text{b) } 0 \leq I_n = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^n}{2^n (x^4 + 3x^2 + 2)(e^x + 1)} dx \leq \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^n}{2^n} dx = \frac{x^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)} = \frac{\sqrt{3}^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)} = \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n}_{\rightarrow 0} \cdot \frac{\sqrt{3}}{n+1}$$

..... 2 pct.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$$

..... 1 pct.

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.