



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2025
CLASA A IX-A
SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV

Problema 1.

Determinați numerele reale strict pozitive a, b, c cu proprietatea că $a + b + c = 1$ și $ab + bc + ac = \sqrt{3abc}$.

Supliment Gazeta Matematică nr 10\2024

Soluție. Aplicăm inegalitatea $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$. Egalitate are loc pentru $x = y = z$.

Deci $(ab + bc + ac)^2 \geq 3(a^2bc + ab^2c + abc^2)$, $(ab + bc + ac)^2 \geq 3abc(a + b + c) = 3abc$, 3 puncte

rezultă $ab + bc + ac \geq \sqrt{3abc}$, dar $ab + bc + ac = \sqrt{3abc}$. Egalitate are loc dacă $ab = bc = ac$,

rezultă $a = b = c$, 2 puncte

$3a = 1$, $a = \frac{1}{3}$, $3a^2 = \sqrt{3a^3}$, $9a^4 = 3a^3$, $3a = 1$, deci $a = b = c = \frac{1}{3} > 0$ 2 puncte

Problema 2.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $x^2 + 6 \cdot [x + 2] \cdot \{x + 2\} + 15 \cdot \{x\}^2 = 9 + 12 \cdot \{x\}$

unde prin $[x]$ înțelegem partea întreagă a lui x și prin $\{x\}$ înțelegem partea fracționară a lui x .

prof. Dimov Adela, Brăila

Soluție. Folosind identitățile:

$x = [x] + \{x\}$, $[x + 2] = [x] + 2$, $\{x + 2\} = \{x\}$, pentru orice x real

, ecuația devine $([x] + \{x\})^2 + 6 \cdot ([x] + 2) \cdot \{x\} + 15 \cdot \{x\}^2 - 12 \cdot \{x\} = 9$ 1 punct

rezultă $([x] + 4 \cdot \{x\})^2 = 9$. De unde $[x] + 4 \cdot \{x\} = \pm 3$ 2 puncte

Atunci $4 \cdot \{x\} = \pm 3 - [x] \in \mathbb{Z}$ implică $\{x\} \in \{0; 0,25; 0,5; 0,75\}$ 2 puncte

De aici, rezultă $x \in \{-5,25; -4,5; -3,75; -3; 3; 2,25; 1,50; 0,75\}$ 2 puncte

Problema 3.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{y^2 - 2y + 2} + \sqrt{y^2 - 6y + 10} = \frac{8}{\sqrt{2^{x^4}} + \sqrt{2^{(2-x)^4}}}$.

prof. George-Florin Șerban, Brăila

Soluție. Aplicăm inegalitatea lui Holder și inegalitatea mediilor,

$\sqrt{2^{x^4}} + \sqrt{2^{(2-x)^4}} \geq 2\sqrt{\sqrt{2^{x^4 + (2-x)^4}}} \geq 2\sqrt{\sqrt{2^{\frac{(x+2-x)^4}{2^3}}}} = 2\sqrt{\sqrt{2^2}} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, 2 puncte

rezultă $\frac{8}{\sqrt{2^{x^4}} + \sqrt{2^{(2-x)^4}}} \leq \frac{8}{\sqrt{8}} = \sqrt{8}$ 1 punct

Aplicăm inegalitatea lui Minkowski,

$$\sqrt{y^2 - 2y + 2} + \sqrt{y^2 - 6y + 10} = \sqrt{(y-1)^2 + 1^2} + \sqrt{(3-y)^2 + 1^2} \geq \sqrt{(y-1+3-y)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{8}, \dots 2 \text{ pct.}$$

rezultă $\sqrt{y^2 - 2y + 2} + \sqrt{y^2 - 6y + 10} = \frac{8}{\sqrt{2^{x^4}} + \sqrt{2^{(2-x)^4}}} = \sqrt{8}$. Egalitatea are loc pentru, $\frac{y-1}{3-y} = \frac{1}{1}$,

$y-1=3-y, 2y=4, y=2 \in R$, și $x^4 = (2-x)^4, 2-x \neq -x$, rezultă $x=2-x, x=1, S = \{(1,2)\}$ 2 pct.

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC și punctele D și E pe latura AB pentru care $AD = DE = EB$. Pe latura AC se ia un punct F astfel încât $AC = 4AF$. Considerăm punctul de intersecție al dreptelor EF și CD notat cu T .

a) Arătați că: $\frac{TC}{TD} \cdot \frac{TE}{TF} = 8$.

b) Dacă N este punctul de intersecție al dreptelor AT și BC , arătați că dreapta EN este paralelă cu AC .

prof. Roxandra Murea și prof. Marian Ciorăscu, Brăila

Soluție:

a) Notăm $\frac{TC}{TD} = k$ și $\frac{TE}{TF} = p$.

De aici $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{k+1} \overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1} \overrightarrow{AD} = \frac{k}{3(k+1)} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{k+1} \overrightarrow{AC}$ (1) 1 punct

$\overrightarrow{AT} = \frac{1}{p+1} \overrightarrow{AE} + \frac{p}{p+1} \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3(p+1)} \overrightarrow{AB} + \frac{p}{4(p+1)} \overrightarrow{AC}$ (2) 1 punct

Din (1) și (2) obținem relațiile: $\frac{k}{3(k+1)} = \frac{2}{3(p+1)}$ și $\frac{1}{k+1} = \frac{p}{4(p+1)}$ 1 punct

De unde $k=6$ și $p=\frac{4}{3}$. Rezultă $\frac{TC}{TD} \cdot \frac{TE}{TF} = 8$ 1 punct

b) Din $k=6 \Rightarrow \overrightarrow{AT} = \frac{2}{7} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{7} \overrightarrow{AC}$

Fie $\frac{BN}{NC} = x \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{x+1} \overrightarrow{AB} + \frac{x}{x+1} \overrightarrow{AC}$ 1 punct

A, T, N - coliniare $\Rightarrow \frac{2(x+1)}{7} = \frac{x+1}{7x}, x > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{1}{3}$ 1 punct

$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \Rightarrow EN \parallel AC$ 1 punct.

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.