OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa Locală, 17 februarie 2024

Clasa a V-a

Subiectul 1

Se consideră numerele naturale nenule x, y şi z. Împărţindu-l pe x la y obţinem câtul 4 şi restul 3, iar împărţindu-l pe y la z obţinem câtul 6 şi restul 5.

a) Arătaţi că $x \geq 167$.

b) Determinaţi numerele x, y şi z ştiind că suma lor este 276.

(***)

Subiectul 2

a) Aflaţi numărul natural n, ştiind că :

$$2025 - \{2024 - [2024 - 2 \cdot (2023 + 2024 : n) + 2024]\} = 1.$$

b) Câte numere naturale mai mici decât 2024, cu toate cifrele pare, trebuie să scriem pentru a fi siguri că cel puţin două dintre numere sunt egale ?

(***)

Subiectul 3

a) Scrieţi numărul 91^{91} sub forma $x^2 + y^3$, unde x şi y sunt numere naturale mai mari sau egale cu 2.

b) Dacă $a = 36^n + 1$, cu n număr natural, $n \geq 2$, arătaţi că numărul a^a se poate scrie ca sumă a două numere naturale, dintre care unul este pătrat perfect şi celălalt cub perfect.

Gazeta Matematica 6-7-8/2023

Subiectul 4

a) Determinaţi numerele de patru cifre $\overline{abcd}$ care verifică relaţia:

$$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2024.$$

b) Determinaţi numerele naturale x, y şi z pentru care :

$$8 \cdot (2^x \cdot 3^{2x} - \overline{yy} - 5) + 6^z = 2025.$$

(***)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

BAREM DE NOTARE ŞI EVALUARE

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală, Judeţul Dolj, 17 februarie 2024

Clasa a V-a

Subiectul 1	
a) $x = 4y + 3, y = 6z + 5, z \geq 6$	1p
$y \geq 6 \cdot 6 + 5, \quad y \geq 41$	1p
$x \geq 4 \cdot 41 + 3, x \geq 167$	1p
b) $x = 4 \cdot (6z + 5) + 3 = 24z + 23$	1p
$24z+23+6z+5+z=276$	1p
$z = 8$	1p
$y = 53$ si $x = 215$	1p
TOTAL	**7p**
Subiectul 2	
$a)2024 - [2024 - 2 \cdot (2023 + 2024 : n) + 2024] = 2024$	1p
$2024 - 2 \cdot (2023 + 2024 : n) + 2024 = 0$	
$(2023 + 2024 : n) = 2024, \quad 2024 : n = 1$	1p
$n = 2024$	1p
b)Numerele de o cifră sunt 0, 2, 4, 6, 8 iar de doua cifre $\overline{ab}$ sunt 20 deoarece a poate lua 4 valori şi b poate lua 5 valori .	1p
Numerele de trei cifre $\overline{abc}$ sunt 100 deoarece a poate lua 4 valori, b poate lua 5 valori, iar c tot 5 valori deci $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ numere	1p
Numerele de 4 cifre mai mici decat 2024 cu toate cifrele pare sunt 2000,…2008, 2020, 2022 adică 7 numere.	1p
În total 5+20+100+7=132 de numere. Pentru a fi siguri că avem două numere egale vom scrie 133 de numere.	1p
TOTAL	**7p**

Subiectul 3	
a) $91 = 8^2 + 3^3$	1p
$91^{91} = 91^{90} \cdot 91 = 91^{90} \cdot (8^2 + 3^3) = 91^{90} \cdot 8^2 + 91^{90} \cdot 3^3$ $= (91^{45} \cdot 8)^2 + (91^{30} \cdot 3)^3$	2p
b) $a^a = a^{36^n+1} = a^{36^n} \cdot (36^n + 1) = a^{36^n} \cdot 36^n + a^{36^n} =$	
$= \left(a^{36^{n-1} \cdot 18} \cdot 6^n\right)^2 + (a^{36^{n-1} \cdot 12})^3$	2p
	2p
TOTAL	7p
Subiectul 4	
a) Relaţia din enunţ devine $1111a + 111b + 11c + d = 2024$	1p
Rezultă $a \leq 1$, deci a=1, de unde obţinem $111b + 11c + d = 913$	1p
Dacă $b \leq 7, atunci$ $111b + 11c + d \leq 777 + 99 + 9 = 885 < 913$	
Deoarece $b \leq 8$, obţinem b=8	1p
11c+d=25 cu c si d cifre, deci c=2 si d=3, numărul căutat este 1823	1p
c) Observăm ca 6^z este impar, deci z=0	1p
$2^x \cdot 3^{2x} - \overline{yy} - 5$=253, $18^x - \overline{yy}$=258	1p
Rezultă x=2 şi y=6	1p
TOTAL	7p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa Locală, 17 februarie 2024

Clasa a VI-a

Subiectul 1.

a) Calculaţi c.m.m.d.c. al numerelor a şi 2024 , unde $a = 1 + 5 + 5^2 + 5^3$.

b) Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $b=(5^{3^n} + 5^{3^n+1} + 5^{3^n+2} + 5^{3^n+3})$ are 120 de divizori.

(***)

Subiectul 2.

a) Arătaţi că dacă $x, y>0$ şi $\frac{x^2 + x\cdot y}{y} = \frac{y^2 + x\cdot y}{x}$, atunci $x=y$.

b) Aflaţi numerele naturale $\overline{xyz}$, scrise în baza 10, ştiind că numărul $x\cdot y\cdot z$ este un cub perfect de trei cifre, iar numerele $x^2 + x \cdot y + x \cdot z$, $y^2 + x \cdot y + y \cdot z$, $z^2 + x \cdot z + y \cdot z$ sunt direct proporţionale cu $y+z$, $x+z$, respectiv $x+y$.

(***)

Subiectul 3.

Considerăm mulţimea $A=\{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 2024\}$.

a) Determinaţi cardinalul mulţimii $B=\{x \in A \mid x \vdots 20 \text{ sau } x \vdots 24\}$.

b) Determinaţi câte mulţimi $C=\{a, b, c, d\}$ ale mulţimii A au proprietatea că $a\cdot b=c\cdot d=2024$.

(***)

Subiectul 4.

În jurul punctului O considerăm unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ adiacente, cu $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC<180°$. Notăm cu $[OM$ şi $[ON$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$, respectiv $\sphericalangle BOC$, iar cu $[OP$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle MON$. Ştiind că suplementul unghiului $\sphericalangle AOC$ este de 4 ori mai mare decât $\sphericalangle POB$, arătaţi că unul din unghiurile $\sphericalangle AOB$ sau $\sphericalangle BOC$ este drept.

Gazeta Matematică Nr. 10/2023

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru : 3 ore

Barem de notare și evaluare

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală, Județul Dolj, 17 februarie 2024

Clasa a VI-a

Subiectul 1.	
a) $a = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 = 156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$	1p
$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$	1p
c.m.m.d.c. $(a, 2024) = 4$	1p
b) $b = 5^{3^n}(1 + 5 + 5^2 + 5^3) = 5^{3^n} \cdot 156 = 5^{3^n} \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 13$	2p
$(3^n+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 120$	1p
Deci $3^n+1=10$, de unde $n=2$.	1p
TOTAL	**7p**
Subiectul 2	
a) Din $\frac{x^2+xy}{y} = \frac{y^2+xy}{x} \Rightarrow \frac{x(x+y)}{y} = \frac{y(y+x)}{x}$.	1p
Atunci $\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{y}{x+y}$, de unde $x=y$.	1p
b) Dacă $y=0$ sau $z=0$, atunci obținem o contradicție.	1p
Dacă $y \neq 0$ și $z \neq 0$, atunci $\frac{x^2+xy+xz}{y+z} = \frac{y^2+xy+yz}{x+z} = \frac{z^2+xz+yz}{x+y}$.	1p
Din $\frac{x(x+y+z)}{y+z} = \frac{y(x+y+z)}{x+z} = \frac{z(x+y+z)}{x+y}$, obținem $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x+z} = \frac{z}{x+y}$.	
Atunci $\frac{x}{x+y+z} = \frac{y}{x+y+z} = \frac{z}{x+y+z}$, de unde $x = y = z$.	1p
Cum $xyz=x^3$ este un cub perfect de trei cifre și x cifră nenulă, rezultă că $x \in \{5,6,7,8,9\}$.	1p
Obținem $\overline{xyz} \in \{555,666,777,888,999\}$.	1p
TOTAL	**7p**

Subiectul 3	
a) $A = \{1,2,3,4,\dots,2024\}$	1p
Considerăm $M=\{x \in A \mid x \vdots 20\}$ şi $P=\{x \in A \mid x \vdots 24\}$. Atunci $B = M \cup P$.	
$M \cap P=\{x \in A \mid x \vdots 20$ şi $x \vdots 24\}=\{x \in A \mid x \vdots [20,24]\}=\{x \in A \mid x \vdots 120\}$	1p
card M =101, card P =84 şi card $(M \cap P)$ =16	1p
card B= card $(M \cup P)$=card M +card P - card $(M \cap P)$= 169	1p
b) $2024=1\cdot 2024=2\cdot 1012=4\cdot 506=8\cdot 253=11\cdot 184=22\cdot 92=23\cdot 88=44\cdot 46$, în total opt perechi de numere din mulţimea A cu produsul 2024.	1p
Fixăm perechea (1,2024) şi observăm că există 7 mulţimi C=$\{1,2024,c,d\}$.	1p
Continuând procedeul avem 7+6+5+...+2+1=28 submulţimi C ale lui A.	1p
TOTAL	**7p**
Subiectul 4	
Deoarece $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente, cu $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC<180°$, rezultă că $\sphericalangle AOC= \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC<180°$. Obţinem $\sphericalangle POB=(180°- \sphericalangle AOC):4>0$.	1p
Cum $[OM$ şi $[ON$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$, respectiv $\sphericalangle BOC$, de unde $\sphericalangle MON=\frac{\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC}{2}$.	1p
Avem două cazuri:	
i) Dacă (OP $\subset$ Int $(\sphericalangle BOM)$, atunci $\sphericalangle POB=\sphericalangle BOM - \sphericalangle POM = \frac{\sphericalangle AOB}{2} - \frac{\sphericalangle MON}{2} = \frac{\sphericalangle AOB}{4} - \frac{\sphericalangle BOC}{4}$.	2p
Rezultă că $180°- \sphericalangle AOC= 4\cdot \sphericalangle POB=\sphericalangle AOB - \sphericalangle BOC$, de unde $\sphericalangle AOB= 90°$, deci $\sphericalangle AOB$ este drept.	1p
ii) Dacă (OP $\subset$ Int $(\sphericalangle BON)$, atunci $\sphericalangle POB=\sphericalangle BON - \sphericalangle PON = \frac{\sphericalangle BOC}{2} - \frac{\sphericalangle MON}{2} = \frac{\sphericalangle BOC}{4} - \frac{\sphericalangle AOB}{4}$.	1p
Rezultă că $180°- \sphericalangle AOC= 4\cdot \sphericalangle POB=\sphericalangle BOC - \sphericalangle AOB$, de unde $\sphericalangle BOC= 90°$, deci $\sphericalangle BOC$ este drept.	1p
TOTAL	**7p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, Judeţul Dolj,17 februarie 2024
Clasa a-VII-a

SUBIECTUL 1.

Fie numărul $n = \frac{\sqrt{70+30\sqrt{5}}}{8\sqrt{7+3\sqrt{5}}} \cdot \left(\sqrt{7-3\sqrt{5}} - \sqrt{7+3\sqrt{5}}\right)$

a) Stabiliţi dacă numărul n este număr raţional;

b) Găsiţi $[n]$ şi $\{n\}$, unde $[n]$ reprezintă partea întreagă a lui n şi $\{n\}$ partea fracţionară a lui n, adică $\{n\} = n - [n]$.

***

SUBIECTUL 2.

a) Arătaţi că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc:

$$|x-y|^2 + |x+y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2);$$

b) Arătaţi că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc:

$$|x+y| + |x-y| = |x| + |y| + \big||x| - |y|\big|.$$

***

SUBIECTUL 3.

Considerăm pătratul $ABCD$, punctul T interior acestuia, astfel încât triunghiul ADT este echilateral. În exteriorul pătratului construim triunghiul echilateral ABE şi triunghiul echilateral EDF, astfel încât punctul B este situat în interiorul triunghiului EDF.

a) Arătaţi că punctele C, T, E – coliniare;

b) Determinaţi măsura unghiului ($\sphericalangle BFE$).

***

SUBIECTUL 4.

Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AC \cap BD = \{O\}$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$. Punctele P şi Q sunt simetricele punctului O faţă de punctele M, respectiv N. Ştiind că punctele P şi Q aparţin dreptelor AD, respectiv CD, demonstraţi că:

a) O este centrul de greutate al triunghiului DPQ;

b) $OPBQ$ este paralelogram;

c) $BP = BQ$ dacă şi numai dacă $ABCD$ este romb.

Gazeta Matematică 10/2023

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte
Timp de lucru 3 ore

Barem de notare şi evaluare
Olimpiada Natională de Matematică

Etapa Locală, Judeţul Dolj, 17 februarie 2024

clasa a VII a

Subiectul 1.	
a) $\sqrt{70+30\sqrt{5}}=5+3\sqrt{5}$	1p
$8\sqrt{7+3\sqrt{5}}=4(3\sqrt{2}+\sqrt{10})$	1p
$\sqrt{7-3\sqrt{5}}-\sqrt{7+3\sqrt{5}}=\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right).$	1p
$\frac{\sqrt{70+30\sqrt{5}}}{8\sqrt{7+3\sqrt{5}}}\cdot\left(\sqrt{7-3\sqrt{5}}-\sqrt{7+3\sqrt{5}}\right)=-\frac{5+3\sqrt{5}}{4(3\sqrt{2}+\sqrt{10})}\cdot\sqrt{10}$	1p
$-\frac{5+3\sqrt{5}}{4(3\sqrt{2}+\sqrt{10})}\cdot\sqrt{10}=-\frac{5\cdot(5+3\sqrt{5})}{4\cdot(3+\sqrt{5})}=-\frac{5}{4}\in\mathbf{Q}.$	1p
b) $[n]=\left[-\frac{5}{4}\right]=\left[-1\frac{1}{4}\right]=-2$	1p
$\{n\}=\left\{-1\frac{1}{4}\right\}=-1\frac{1}{4}-(-2)=\frac{3}{4}.$	1p
TOTAL	**7p**
Subiectul 2	
a) Folosind relaţia $\lvert x\rvert^2=x^2\Rightarrow$	
$\lvert x-y\rvert^2+\lvert x+y\rvert^2=x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2=2x^2+2y^2$	1p
$2(\lvert x\rvert^2+\lvert y\rvert^2)=2(x^2+y^2)=2x^2+2y^2$	
Finalizare : $\lvert x-y\rvert^2+\lvert x+y\rvert^2=2(\lvert x\rvert^2+\lvert y\rvert^2)$	1p
b) Ridicând la pătrat obşinem: $\lvert x+y\rvert+\lvert x-y\rvert=\lvert x\rvert+\lvert y\rvert+\lvert\lvert x\rvert-\lvert y\rvert\rvert\uparrow^2$	1p
$(\lvert x+y\rvert+\lvert x-y\rvert)^2=\left[(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)+\lvert\lvert x\rvert-\lvert y\rvert\rvert\right]^2\overset{\lvert x\rvert^2=x^2}{\Longleftrightarrow}x^2+y^2+2xy+x^2+y^2-$ $2xy+2\lvert x^2-y^2\rvert=x^2+y^2+2\lvert xy\rvert+x^2+y^2-2\lvert xy\rvert+2\lvert x^2-y^2\rvert$	3p
Finalizare: $2\lvert x^2-y^2\rvert=2\lvert x^2-y^2\rvert$	1p
TOTAL	**7p**

Subiectul 3	
a) ΔDTC – isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle CTD) = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$	1p
ΔATE – isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle ATE) = \frac{180^\circ - (30^\circ + 60^\circ)}{2} = 45^\circ$	1p
Astfel $m(\sphericalangle ETC) = 180^\circ \Rightarrow C, T, E$ – coliniare	1p
b) $\left.\begin{array}{l}\Delta ADE \\ \Delta CDF\end{array}\right\| \begin{array}{c} DA = DC \\ ED = FD \\ \sphericalangle EDA = \sphericalangle FDC = 15^\circ \end{array} \Big\| \xRightarrow{L.U.L.} \Delta ADE \equiv \Delta CDF$	1p
Rezultă astfel $FC = AE$ și $m(\sphericalangle DCF) = 150^\circ \Rightarrow \sphericalangle FCB = 60^\circ$	1p
Dar ΔFBC – isoscel $\Rightarrow \Delta FBC$ – echilateral $\Rightarrow FB = BE \Rightarrow \Delta EBF$ – isoscel $\Rightarrow$	1p
$m(\sphericalangle EBF) = 150^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BFE) = 15^\circ$	1p
TOTAL	**7p**
Subiectul 4	
a) Fie $PO \cap DQ = \{R\}, OQ \cap AD = \{S\}$.	
$\Delta OMA \equiv \Delta OBC, \Delta ONC \equiv \Delta OSA, \Delta ORS \equiv \Delta OMN \Rightarrow$	1p
$OR = \frac{1}{2}PO, OS = \frac{1}{2}OQ$, $MN \equiv RS$.	
$MN \parallel RS \Rightarrow RS \parallel PQ$ și $RS = \frac{PQ}{2}$.	1p
în $\Delta DPQ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R - \text{mij.}(DQ) \\ S - \text{mij.}(PD) \end{array}\right\} \Rightarrow O$ – c. g. ΔDPQ	1p
b) Fie $DO \cap PQ = \{T\}$	
O – c. g. $\Delta DPQ, OT = \frac{OD}{2} = \frac{OB}{2} = TB$, dar $TQ = TP \Rightarrow OPBQ$ paralelogram	1p
c) "$\Rightarrow$"	
BP≡BQ $\Rightarrow PBQO$ – romb $\Rightarrow \sphericalangle OTQ = 90^\circ, DT$ – mediană $\Rightarrow \Delta DPQ$ – is.	1p
$\Delta APB \equiv \Delta CQB \Rightarrow AP \equiv CQ \Rightarrow DA \equiv DC \Rightarrow ABCD$ – romb.	1p
"$\Leftarrow$"	
DT- mediană, DT – bisectoarea $\sphericalangle PDQ \Rightarrow \Delta DPQ$ – isoscel $\Rightarrow DB \perp PQ \Rightarrow OB \perp PQ$,	
dar $OBQO$ – paralelogram $\Rightarrow OBQO$ – romb $\Rightarrow BP \equiv BQ$	1p
TOTAL	**7p**

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa Locală- 2024

clasa a VIII-a

Subiectul 1

a) Se consideră numerele reale x, y, astfel încât $(x-1)^2+(3y-2)^2=9$ şi numărul $a=3x+6y$. Demonstraţi că $a\in[-8, 22]$.

b) Determinaţi numărul natural n pentru care numărul $a=n^4+4$ este prim.

Subiectul 2

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctele M, N, P şi Q sunt mijloacele segmentelor AB, CC', $A'D'$, respectiv BC.

a) Demonstraţi că unghiul dintre dreapta PM şi planul (ABC) este congruent cu unghiul dintre dreapta PN şi planul (BCC').

b) Arătaţi că punctele M, N, P şi Q sunt coplanare.

Subiectul 3

a) Arătaţi că, pentru orice numere reale pozitive x şi y, are loc inegalitatea: $\frac{2}{\sqrt{xy}}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

b) Arătaţi că, pentru orice numere reale pozitive a, b şi c, are loc inegalitatea:

$$3+2\left(\frac{a}{\sqrt{bc}}+\frac{b}{\sqrt{ca}}+\frac{c}{\sqrt{ab}}\right)\le(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Problema E16686, Gazeta Matematică nr. 9/2023

Subiectul 4

Se consideră triunghiul echilateral ABC şi un punct V care nu aparţine planului (ABC), astfel încât unghiurile VAB, VBC şi VCA sunt congruente. Ştiind că punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, demonstraţi că dreapta VO este perpendiculară pe planul (ABC).

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore

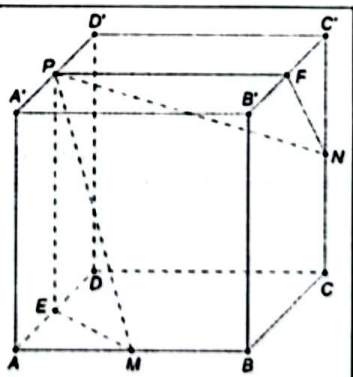
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

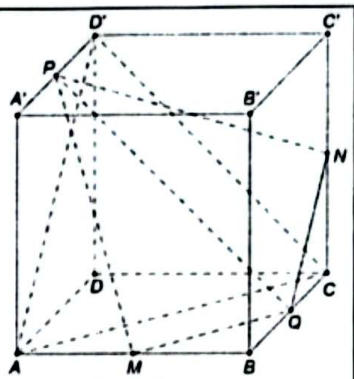
Etapa Locală- 2024

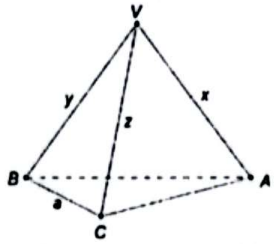
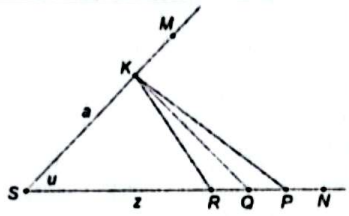
clasa a VIII-a

Barem de notare și evaluare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

Subiectul 1		
1.a)	$(x-1)^2 \le 9 \Leftrightarrow \lvert x-1\rvert \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x-1 \le 3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 4 \Leftrightarrow -6 \le 3x \le 12$	1p
	$(3y-2)^2 \le 9 \Leftrightarrow \lvert 3y-2\rvert \le 3 \Leftrightarrow -3 \le 3y-2 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le 3y \le 5 \Leftrightarrow -2 \le 6y \le 10$	1p
	Deci $-8 \le 3x+6y \le 22 \Leftrightarrow a \in [-8, 22]$	1p
1.b)	$a = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2+2)^2 - (2n)^2$	1p
	$a = (n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$	1p
	$n^2+2n+2 \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2-2n+2 \in \mathbb{N}$. Cum a este număr prim și $n^2-2n+2 \le n^2+2n+2 \Rightarrow n^2-2n+2=1$	1p
	$\Rightarrow (n-1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1$, pentru care se obține $a = 5$ care este număr prim	1p
TOTAL		**7p**
Subiectul 2		
2.a)	Considerăm punctele E și F mijloacele segmentelor AD, respectiv $B'C'$ $A'P \equiv B'F, A'P \parallel B'F \Rightarrow A'PFB'$ paralelogram $\Rightarrow PF \parallel A'B'$ și $PF \equiv A'B' \Rightarrow PF \perp (BCC')$ Analog se arată că $AA'PE$ este paralelogram, de unde $PE \equiv AA'$ și $PE \parallel AA' \Rightarrow PE \perp (ABC)$  	1p
	$pr_{(ABC)}PM = EM, pr_{(BCC')}PN = FN \Rightarrow \sphericalangle(PM,(ABC)) = \sphericalangle PME$ și $\sphericalangle(PN,(BCC')) = \sphericalangle PNF$ Cum $AE \equiv C'F, AM \equiv C'N, \sphericalangle EAM = \sphericalangle NC'F = 90^\circ \Rightarrow \Delta AEM \equiv \Delta C'FN \Rightarrow ME \equiv FN$ $PE \equiv PF, ME \equiv FN, \sphericalangle PEM = \sphericalangle PFN = 90^\circ \Rightarrow \Delta PEM \equiv \Delta PFN$	1p
	$\Rightarrow \sphericalangle PME \equiv \sphericalangle PNF$	1p

2.b)	Cum Q este mijlocul segmentului BC $\Rightarrow PD' \parallel QC$ şi $PD' \equiv QC \Rightarrow D'PQC$ paralelogram $\Rightarrow PQ \parallel D'C$, $D'C \subset (D'AC) \Rightarrow PQ \parallel (D'AC)$  	1p
	MQ este linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow MQ \parallel AC$, $AC \subset (D'AC) \Rightarrow MQ \parallel (D'AC)$ Cum PQ, $MQ \subset (PMQ)$, $PQ \cap MQ = \{Q\} \Rightarrow (PMQ) \parallel (D'AC)$ (1) NQ este linie mijlocie în $\Delta BCC' \Rightarrow NQ \parallel BC'$ $AB \equiv C'D'$ şi $AB \parallel C'D' \Rightarrow ABC'D'$ paralelogram $\Rightarrow BC' \parallel AD'$ $\Rightarrow NQ \parallel AD'$, $AD' \subset (D'AC) \Rightarrow NQ \parallel (D'AC)$ Am demonstrat că $PQ \parallel (D'AC)$, $NQ \cap PQ = \{Q\}$ şi NQ, $PQ \subset (NPQ)$ $\Rightarrow (NPQ) \parallel (D'AC)$ (2)	1p 1p
	Din relaţiile (1) şi (2), obţinem $(NPQ) = (PMQ)$, de unde punctele M, N, P Q sunt coplanare	1p
TOTAL		**7p**
Subiectul 3		
3.a	$\frac{2}{\sqrt{xy}} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{xy}} \le \frac{x+y}{xy} \Leftrightarrow 2xy \le \sqrt{xy}(x+y)$	1p
	$\Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \le x+y$	1p
	$\Leftrightarrow 0 \le \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2$, adevărat pentru orice x şi y numere reale pozitive	1p
3.b	Inegalitatea se mai scrie: $3 + \frac{2a}{\sqrt{bc}} + \frac{2b}{\sqrt{ca}} + \frac{2c}{\sqrt{ab}} \le a \cdot \frac{1}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + b \cdot \frac{1}{b} + \frac{b}{c} + c \cdot \frac{1}{a} + c \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{c}$	1p
	$\Leftrightarrow 3 + \frac{2a}{\sqrt{bc}} + \frac{2b}{\sqrt{ca}} + \frac{2c}{\sqrt{ab}} \le 3 + a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ $\Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{bc}} + \frac{2b}{\sqrt{ca}} + \frac{2c}{\sqrt{ab}} \le a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ (1)	1p
	Conform subpunctului a) avem : $\frac{2}{\sqrt{bc}} \le \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{bc}} \le a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, $\frac{2}{\sqrt{ca}} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{2b}{\sqrt{ca}} \le b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$, $\frac{2}{\sqrt{ab}} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{2c}{\sqrt{ab}} \le c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$	1p
	Adunăm cele trei inegalităţi şi obţinem inegalitatea (1), care este echivalentă cu inegalitatea cerută.	1p
TOTAL		**7p**

Subiectul 4		
4.	Se poate presupune fără a restrânge generalitatea că $VA = x > VB = y > VC = z$  	1p
	Notăm $AB = BC = CA = a$ şi $\sphericalangle VAB = \sphericalangle VBC = \sphericalangle VCA = u$	1p
	Construim în plan unghiul MSN de măsură u	1p
	Pe semidreapta SM considerăm punctul K, astfel încât $SK = a$, iar pe semidreapta SN considerăm punctele P, Q şi R, astfel încât $SP = x$, $SQ = y$ şi $SR = z$	1p
	$\Delta PSK \equiv \Delta VAB \Rightarrow PK = VB = y$ $\Delta QSK \equiv \Delta VBC \Rightarrow QK = VC = z$ $\Delta RSK \equiv \Delta VCA \Rightarrow RK = VA = x$	1p
	În triunghiul RSK: $RK < QR + QK \Rightarrow x < y - z + z \Rightarrow x < y$ contradicţie Analog se obţine contradicţie dacă presupunem $x > z > y$, $y > z > x$, $y > x > z$, $z > x > y$ sau $z > y > x$. Deci cel puţin două dintre numerele x, y şi z sunt egale	1p
	Putem presupune că $x = y \Rightarrow \Delta VAB \equiv \Delta VBC \Rightarrow VB = VC \Rightarrow y = z \Rightarrow x = y = z$ Aşadar $VABC$ este o piramidă regulată $\Rightarrow VO \perp (ABC)$ Analog pentru $y = z$ sau $z = x$	1p
TOTAL		**7p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, Judeţul Dolj, 17 februarie 2024
CLASA a IX-a

Subiectul 1. a) Demonstraţi că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left[\frac{2x+1}{3}\right] + \left[\frac{4x+5}{6}\right] = \frac{x+3}{2}$.

(***)

Subiectul 2. Demonstraţi că 13 divide numărul $67^{67} + 83^{83} - 7^{7}$.

Supliment Gazeta Matematică Nr.10/2023

Subiectul 3. Fie A, B, C trei puncte necoliniare şi punctele M, N, P, T astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC}$, $4\overrightarrow{BP} = 9\overrightarrow{CP}$ şi $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AT}$.

a) Arătaţi că vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{NP}$ sunt coliniari.

b) Arătaţi că $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{TN}$.

(***)

Subiectul 4. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi M un punct mobil pe cercul său circumscris.

a) Arătaţi că punctul P definit de relaţia $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ se mişcă pe un cerc.

b) Considerăm numerele $x, y \in \mathbb{R}$. Arătaţi că punctul Q definit de relaţia $\overrightarrow{MQ} + (x+y) \cdot \overrightarrow{MA} = x \cdot \overrightarrow{MB} + y \cdot \overrightarrow{MC}$ se mişcă pe un cerc.

Gazeta Matematică Nr.10/2023

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, Judeţul Dolj, 17 februarie 2024
CLASA a IX-a - Soluţii şi bareme

Subiectul 1.	
a) Pentru orice număr real x avem $x = [x] + \{x\}$, unde $\{x\} \in [0,1)$ iar $[x] \in \mathbb{Z}$.....	1p
i) Dacă $\{x\} \in [0, \frac{1}{2})$ atunci $\left\{x + \frac{1}{2}\right\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ şi $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [x]$, iar $\{2x\} \in [0,1)$ şi $[2x] = 2[x]$.	
Deci $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$ este echivalentă cu $[x] + [x] = 2[x]$, relaţie adevărată.....	1p
ii) Dacă $\{x\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ atunci $\{x\} + \frac{1}{2} \in \left[1, \frac{3}{2}\right)$ şi $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [x] + 1$, iar $\{2x\} \in [1,2)$ şi $[2x] = 2[x] + 1$. Deci $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$ este echivalentă cu $[x] + [x] + 1 = 2[x] + 1$, relaţie adevărată.....	1p
b) $\left[\frac{2x+1}{3}\right] + \left[\frac{4x+5}{6}\right] = \left[\frac{2x+1}{3}\right] + \left[\frac{2x+1}{3} + \frac{1}{2}\right] = \left[2 \cdot \frac{2x+1}{3}\right]$ şi ecuaţia devine $\left[\frac{4x+2}{3}\right] = \frac{x+3}{2}$.....	1p
Dar $\left[\frac{4x+2}{3}\right] \le \frac{4x+2}{3} < \left[\frac{4x+2}{3}\right] + 1$ de unde se obţine $\frac{x+3}{2} \le \frac{4x+2}{3} < \frac{x+3}{2} + 1$ deci $x \in \left[1, \frac{11}{5}\right)$.....	2p
Din condiţia $\frac{x+3}{2} \in \mathbb{Z}$ şi $\frac{x+3}{2} \in \left[2, \frac{13}{5}\right)$ avem $\frac{x+3}{2} = 2$ deci $x = 1$ este soluţie.....	1p
Subiectul 2.	
$(a+b)^n = M_a + b^n$, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$.....	1p
$67^{67} = (13 \cdot 5 + 2)^{67} = M_{13} + 2^{67}$. Dar $2^{67} = (2^6)^{11} \cdot 2 = (13 \cdot 5 - 1)^{11} \cdot 2 = M_{13} - 2$, deci $67^{67} = M_{13} - 2$.....	2p
$83^{83} = (13 \cdot 6 + 5)^{83} = M_{13} + 5^{83}$. Dar $5^{83} = (5^2)^{41} \cdot 5 = (13 \cdot 2 - 1)^{41} \cdot 5 = M_{13} - 5$, deci $83^{83} = M_{13} - 5$.....	2p
$7^7 = (7^3)^2 \cdot 7 = (13 \cdot 26 + 5)^2 \cdot 7 = (M_{13} + 5)^2 \cdot 7 = (M_{13} + 5^2) \cdot 7 = M_{13} - 7$.....	1p
Deci $67^{67} + 83^{83} - 7^7 = M_{13} - 2 - 5 + 7 = M_{13}$.....	1p
Subiectul 3.	
a) $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$, iar $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.....	1p
$\overrightarrow{CP} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$, iar $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AC}$.....	2p
Deci $\overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{MN}$, de unde obţinem că vectorii $\overrightarrow{NP}$ şi $\overrightarrow{MN}$ sunt coliniari	1p
b) $MB = \frac{3}{5}AB$, $MT = MA + AT = \frac{2}{5}AB + \frac{1}{5}AB = \frac{3}{5}AB$ deci M este mijlocul segmentului BT.....	1p
În triunghiul PBT, PM este mediană şi $\overrightarrow{PM} = 3\overrightarrow{NM}$, deci N este centrul de greutate al triunghiului PBT, de unde obţinem că $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NT} = \vec{0}$ echivalent cu $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{TN}$.....	2p

Subiectul 4.	
a) Dacă $\Delta\, ABC$ este dreptunghic în A atunci O, mijlocul laturii BC, este centrul cercului circumscris acestuia.....	1p
Deoarece $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2 \cdot \overrightarrow{MO}$, deci $\lvert\overrightarrow{AP}\rvert = 2R$, unde R este raza cercului circumscris $\Delta\, ABC$.....	1p
În concluzie P este situat pe cercul de centru A şi rază $2R$.....	1p
b) $\overrightarrow{MQ} + (x+y) \cdot \overrightarrow{MA} = x \cdot \overrightarrow{MB} + y \cdot \overrightarrow{MC}$ este echivalentă cu $\overrightarrow{MQ} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$.....	1p
Notăm N punctul pentru care $x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN}$ şi O' punctul pentru care $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AN}$. Deoarece $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{OO'}$ atunci $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{QO'}$ deci $QO' = R$.....	2p
Q este situat pe cercul de centru O' şi rază R.....	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALA
17 FEBRUARIE 2024

SUBIECT CLASA A X-A

Subiectul 1.

Fie $a, b, c \in (1, \infty)$. Să se arate că:

$$\log_a b \cdot \log_{ab} b + \log_b c \cdot \log_{bc} c + \log_c a \cdot \log_{ca} a \geq \frac{3}{2}$$

Subiectul 2.

Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ și funcțiile bijective $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$f\big((fof)(x) \cdot f(x)\big) = m \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}^*.$$

Subiectul 3.

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

a) Dacă $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \neq -1$, să se arate că $\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3}{1 + z_1z_2z_3} \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ și $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, să se arate că $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

Subiectul 4.

Fie triunghiul ABC cu $A(z_1)$, $B(z_2)$ și $C(z_3)$, unde numerele complexe z_1, z_2 și z_3 sunt nenule și verifică $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și $|z_1 - z_2| = |z_3|$. Să se arate că aria triunghiului ABC este $\frac{3}{2}|z_1z_2|$ iar $\cos C \geq \frac{4}{5}$.

(Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2023)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOLUȚII ȘI BAREM CLASA A X-A

Subiectul 1.

Avem $\log_{ab} b = \frac{1}{\log_b(ab)} = \frac{1}{1+\log_b a} = \frac{\log_a b}{1+\log_a b}$ și analoagele.

Inegalitatea devine: $\frac{(\log_a b)^2}{1+\log_a b} + \frac{(\log_b c)^2}{1+\log_b c} + \frac{(\log_c a)^2}{1+\log_c a} \geq \frac{3}{2}$.....**1p**

Notăm $\log_a b = x, \log_b c = y, \log_c a = z \Longrightarrow x, y, z \in (0, \infty)$ și $xyz = 1$.....**1p**

Arătăm că $\frac{x^2}{1+x} + \frac{y^2}{1+y} + \frac{z^2}{1+z} \geq \frac{3}{2}$.

Din inegalitatea Bergstrom $\Longrightarrow \frac{x^2}{1+x} + \frac{y^2}{1+y} + \frac{z^2}{1+z} \geq \frac{(x+y+z)^2}{3+x+y+z}$.....**2p**

Fie $S = x + y + z$. Din inegalitatea mediilor, obținem că $S \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$.....**2p**

Avem $\frac{S^2}{3+S} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2S^2 \geq 3S + 9 \Leftrightarrow (S-3)(2S+3) \geq 0$ ceea ce este adevărat.....**1p**

Subiectul 2.

Deoarece f bijectivă, obținem că $(fof)(x) \cdot f(x) = f^{-1}(m)$ **1p**

Înlocuind x cu $f(x)$ obținem $(fofof)(x) \cdot (fof)(x) = f^{-1}(m)$ **1p**

Deci $(fofof)(x) = f(x)$ și cum f este injectivă obținem $(fof)(x) = x$ **2p**

Deci $x \cdot f(x) = f^{-1}(m)$ adică $f(x) = \frac{f^{-1}(m)}{x}$ **1p**

Pentru $x = 1$ obținem $f(1) = f^{-1}(m)$ adică $(fof)(1) = m$ deci $m = 1$ **1p**

In concluzie $f(x) = \frac{a}{x}$ unde $a = f(1)$ **1p**

Subiectul 3.

a) Din $z \cdot \bar{z} = |z|$ avem $\bar{z} = \frac{1}{z}$ **1p**

Deci $\overline{\left(\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3}{1 + z_1z_2z_3}\right)} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3}{1 + z_1z_2z_3}$ **1p**

În concluzie $\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3}{1 + z_1z_2z_3} \in \mathbb{R}$ **1p**

b) $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$ **1p**

Deci $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right)$ **1p**

Adică $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2z_1z_2z_3\overline{(z_1 + z_2 + z_3)}$ **1p**

De unde $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$ **1p**

Subiectul 4.

Fie G centrul de greutate al triunghiului $ABC \Longrightarrow z_G = \frac{z_1+z_2+z_3}{3} = 0 \Longrightarrow G(0)$ **1p**

Deoarece $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și $|z_1 - z_2| = |z_3| \Longrightarrow |z_1 - z_2| = |z_1 + z_2| \Longrightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 \Longleftrightarrow (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \Longrightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \Longrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in i \cdot \mathbb{R} \Longrightarrow z_1 = aiz_2$, unde $a \in \mathbb{R}^*$.....**1p**

$\frac{z_1}{z_2} \in i \cdot \mathbb{R} \Longleftrightarrow \frac{z_1 - z_G}{z_2 - z_G} \in i \cdot \mathbb{R} \Longleftrightarrow AG \perp BG \Longrightarrow$ triunghiul AGB este dreptunghic în G **1p**

Avem $A_{\Delta ABC} = 3 \cdot A_{\Delta GAB} = 3 \cdot \frac{AG \cdot BG}{2} = \frac{3}{2}|z_1 - z_G| \cdot |z_2 - z_G| = \frac{3}{2}|z_1 z_2|$.....**1p**

Considerăm unghiul ACB pozitiv orientat $\Longrightarrow \sphericalangle ACB = arg\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$

și $\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \left|\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right| (\cos C + i \sin C) \Longrightarrow \left|\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right| \cos C = Re\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right)$.....**1p**

Avem: $\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{z_1 + 2z_2}{2z_1 + z_2} = \frac{aiz_2 + 2z_2}{2aiz_2 + z_2} = \frac{2 + ai}{1 + 2ai} \Longrightarrow Re\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) = \frac{2 + 2a^2}{1 + 4a^2}$ și $\left|\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right| = \sqrt{\frac{4 + a^2}{1 + 4a^2}}$

Deci, $\cos C = \frac{2 + 2a^2}{\sqrt{(4 + a^2)(1 + 4a^2)}}$.....**1p**

Arătăm că $\frac{2 + 2a^2}{\sqrt{(4 + a^2)(1 + 4a^2)}} \geq \frac{4}{5} \Longleftrightarrow 5(1 + a^2) \geq 2\sqrt{(4 + a^2)(1 + 4a^2)}$ ceea ce rezultă din inegalitatea mediilor pentru numerele pozitive $4 + a^2$ și $1 + 4a^2$. **1p**

Obs. Dacă unghiul ACB este negativ orientat $\Longrightarrow \sphericalangle ACB = 2\pi - arg\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ și $\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \left|\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right| (\cos C - i \sin C) \Longrightarrow \left|\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right| \cos C = Re\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right)$ indiferent de orientarea $\sphericalangle ACB$.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală , 17.02.2024

Clasa a XI-a

Subiectul 1. a) Fie α un număr real şi matricea $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

Demonstraţi că $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & \sin n\alpha\\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$, pentru orice număr natural nenul n.

b) Dacă $B=\begin{pmatrix}\sqrt{6}+\sqrt{2} & \sqrt{6}-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}-\sqrt{6} & \sqrt{6}+\sqrt{2}\end{pmatrix}$, calculaţi B^{2024}.

***

Subiectul 2. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}$.

a) Arătaţi că $a_n<1, \forall\, n\geq 1$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot a_n)$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot a_n)^n$.

***

Subiectul 3. a) Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$. Arătaţi că $A^4+A^2+I_2=O_2$ dacă şi numai dacă $A^2-A+I_2=O_2$ sau $A^2+A+I_2=O_2$.

b) Daţi exemplu de o matrice $A\in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $A^4+A^2+I_2=O_2$, $A^2-A+I_2\neq O_2$ şi $A^2+A+I_2\neq O_2$.

Gazeta Matematică 6-7-8/2023, Cezar Apostolescu,Ploieşti

Subiectul 4. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=\{\sqrt{n}\}+\{\sqrt{n+1}\}+\{\sqrt{n+2}\}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$(unde notaţia $\{\cdot\}$ reprezintă partea fracţionară).

Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ admite două subşiruri $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ şi $(x_{j_n})_{n\geq 1}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{k_n})=0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{j_n})=1$.

Gazeta Matematică 9/2023, S:L23.226, Daniel Petriceanu, Bucureşti

Notă:

- ***Toate subiectele sunt obligatorii;***
- ***Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;***
- ***Timp de lucru: 3 ore.***

Barem de notare şi evaluare
Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, Judeţul Dolj, 17 februarie 2024
Clasa a XI-a

Subiectul 1.	
a) Demonstrăm prin inducţie propoziţia: $P(n): A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. $P(1)$ este evident adevărată. Demonstrăm că $P(n) \to P(n+1)$. Avem: $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\alpha & \sin(n+1)\alpha \\ -\sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{pmatrix}$. Conform principiului inducţiei matematice, rezultă că propoziţia $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.	3p
b) Cum $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ şi $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ avem $B = 4\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{12} & \sin\frac{\pi}{12} \\ -\sin\frac{\pi}{12} & \cos\frac{\pi}{12} \end{pmatrix}$. Folosind subpunctul a) rezultă	2p
$B^{2024} = 4^{2024}\begin{pmatrix} \cos\frac{506\pi}{3} & \sin\frac{506\pi}{3} \\ -\sin\frac{506\pi}{3} & \cos\frac{506\pi}{3} \end{pmatrix} = 2^{4048}\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & \sin\frac{2\pi}{3} \\ -\sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = 2^{4048}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.	2p
TOTAL	7p
Subiectul 2.	
a) Deoarece $\frac{1}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2+1}$, $\frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2+1}, \dots, \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1}$, prin adunarea acestor inegalităţi se obţine că: $a_n < \frac{n}{n^2+1}$. Cum $\frac{n}{n^2+1} < 1, \forall n \ge 1$, rezultă că $a_n < 1, \forall n \ge 1$.	1p
b) Avem inegalităţile: $\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2+1}$; $\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2+1}$;	

..... $\frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1}$. După adunarea acestora obținem: $\frac{n}{n^2+n} < a_n < \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow \frac{n^2}{n^2+n} < n \cdot a_n < \frac{n^2}{n^2+1}$. Dar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 1$.	1p 1p
c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n \cdot a_n)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[(1+na_n-1)^{\frac{1}{na_n-1}}\right]^{n(na_n-1)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n(na_n-1)}$. Dar $n \cdot (na_n - 1) = n^2 a_n - n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{n^2}{n^2+k} - 1\right) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k}$ și se obține: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n} \le \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k} \le \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \le \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k} \le \frac{n^2+n}{2n^2+2}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+2} = \frac{1}{2}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k} = \frac{1}{2}$, de unde obținem că: $\lim\limits_{n\to\infty} (na_n)^n = e^{-\frac{1}{2}}$.	1p 2p 1p
TOTAL	**7p**
Subiectul 3.	
a) „$\Leftarrow$"Presupunem că $A^2 - A + I_2 = O_2$ sau $A^2 + A + I_2 = O_2$. Rezultă $A^4 + A^2 + I_2 = A^4 + 2A^2 + I_2 - A^2 = (A^2 + I_2)^2 - A^2 = (A^2 + A + I_2)(A^2 - A + I_2) = O_2$. "$\Rightarrow$"Presupunem că $A^4 + A^2 + I_2 = O_2$. Notăm $\alpha = tr(A)$ și $\beta = \det(A)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Din relația Cayley-Hamilton avem: $A^2 = \alpha A - \beta I_2$. Din ipoteza $A^4 + A^2 + I_2 = O_2$ obținem $(\alpha^3 + \alpha - 2\alpha\beta)A = (\beta\alpha^2 - \beta^2 + \beta - 1)I_2$. $\det((\alpha^3 + \alpha - 2\alpha\beta)A) = \det((\beta\alpha^2 - \beta^2 + \beta - 1)I_2) \Rightarrow (\alpha^3 + \alpha - 2\alpha\beta)^2 \cdot \beta =$ $= (\beta\alpha^2 - \beta^2 + \beta - 1)^2 .(*)$ $tr((\alpha^3 + \alpha - 2\alpha\beta)A) = tr((\beta\alpha^2 - \beta^2 + \beta - 1)I_2) \Rightarrow (\alpha^3 + \alpha - 2\alpha\beta) \cdot \alpha =$ $= 2(\beta\alpha^2 - \beta^2 + \beta - 1).(**)$ Din relațiile $(*)$ și $(**)$ obținem $\alpha^2(\alpha^2 + 1 - 2\beta)^2\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) = 0$. -dacă $\alpha = 0$ obținem $\beta^2 - \beta + 1 = 0$, contradicție cu $\beta \in \mathbb{R}$.	1p 1p

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală - 17 februarie 2024

Clasa a XII-a

Subiectul 1

Fie $G = (5, \infty)$ şi operaţia $x * y = xy - 5x - 5y + 30$.

a) Demonstraţi că operaţia dată induce pe G o structură de grup abelian.

b) Arătaţi că, dacă H este un subgrup al lui G care conţine toate numerele naturale mai mari decât 5, atunci H conţine toate numerele raţionale mai mari decât 5.

(***)

Subiectul 2

Demonstraţi că

$$\int_0^1 \frac{4xe^x - 2}{(x+1)^2} dx \leq 1.$$

(***)

Subiectul 3

Fie $(G,\cdot)$ un grup cu elementul neutru e şi H, K două subgrupuri proprii ale sale.

Dacă $x^2 = e$, pentru orice $x \in G \setminus (H \cup K)$, arătaţi că $(H \cap K,\cdot)$ este grup comutativ.

Gazeta Matematică nr. 11/2021

Subiectul 4.

Fie funcţiile $f, g: R \to R$ cu proprietatea că f este injectivă şi

$g(x) = f(x) + \sin f(x)$, pentru orice $x \in R$.

Arătaţi că f admite primitive dacă şi numai dacă g admite primitive.

Gazeta Matematică nr. 9/2023

***Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.*

Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru : 3 ore

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Barem de notare și evaluare

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală - 17 februarie 2024

Clasa a XII-a

Subiectul 1	
a) Operația „*" este lege de compoziție pe G, asociativă, comutativă, cu elementul neutru $e = 6$, $\forall x \in G, \exists x' = 5 + \frac{1}{x-5} \in G$, astfel încât $x * x' = x' * x = 6$.	1p 1p 1p
Fie $q \in Q, q > 5$. Atunci $q - 5 \in Q, q - 5 > 0$, prin urmare există numerele naturale nenule m, n, prime între ele, astfel încât $$q = 5 + \frac{m}{n}.$$ $$q = 5 + (m + 5 - 5) \cdot (\frac{1}{n} + 5 - 5) =$$ $$= (m + 5) * (\frac{1}{n + 5 - 5} + 5) = (m + 5) * (n + 5)'$$ Cum m, n sunt numere naturale nenule, rezultă că $m + 5, n + 5$ sunt numere naturale mai mari decât 5, deci conținute de H. Conform criteriului subgrupului, q aparține lui H.	2p 1p 1p
TOTAL	**7p**
Subiectul 2	
$(xe^x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in R$ implică $4xe^x - 2 \leq 2x^2e^{2x}, \forall x \in R$. Atunci $\frac{4xe^x-2}{(x+1)^2} \leq \frac{2x^2e^{2x}}{(x+1)^2}$, $\forall x \in [0,1]$, deci $\int_0^1 \frac{4xe^x-2}{(x+1)^2}dx \leq 2\int_0^1 \frac{x^2e^{2x}}{(x+1)^2}dx$. (1) $$\int_0^1 \frac{x^2e^{2x}}{(x+1)^2}dx = \int_0^1 \left(\frac{-1}{x+1}\right)' x^2e^{2x}dx = -\frac{e^2}{2} + \int_0^1 2xe^{2x}dx =$$ $$= -\frac{e^2}{2} + \int_0^1 x(e^{2x})'dx = -\frac{e^2}{2} + e^2 - \int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}. (2)$$ Din relațiile (1) și (2) rezultă concluzia.	2p 1p 2p 2p
TOTAL	**7p**

Subiectul 3	
$H \cap K$ subgrup al lui G.	1p
Un grup nu poate fi scris ca reuniunea a două subgrupuri proprii ale sale, astfel mulțimea $G \setminus (H \cup K)$ este nevidă.	
Fie $x \in G \setminus (H \cup K)$, atunci $ax \in G \setminus (H \cup K)$, pentru orice $a \in H \cap K$. (1)	1p
În caz contrar, avem $ax = y \in (H \cup K)$, deci $x = a^{-1}y$, iar $a^{-1} \in H \cap K$ și $y \in (H \cup K)$ conduc la $x = a^{-1}y \in (H \cup K)$, ceea ce reprezintă o contradicție.	1p
Din (1) și din ipoteză, avem că $(ax)^2 = e = x^2$, pentru orice $a \in H \cap K$, de unde obținem că $axa = x$, adică $ax = xa^{-1}$, pentru orice $a \in H \cap K$. (2)	2p
Fie $a, b \in H \cap K$ oarecare. Atunci $a^{-1}, ab \in H \cap K$, iar prin aplicarea succesivă a relației (2) obținem $ab = abx^2 = \big((ab)x\big)x = x(ab)^{-1}x = (xb^{-1})(a^{-1}x) = (bx)(xa) = bx^2a = ba$.	2p
TOTAL	**7p**
Subiectul 4	
„ $\Rightarrow$ " Știm că f admite primitive, prin urmare f are proprietatea lui Darboux.	1p
Cum f are proprietatea lui Darboux și f este injectivă obținem că f este strict monotonă.	1p
O funcție monotonă ce are proprietatea lui Darboux este continuă.	1p
Fie $h: R \to R, h(t) = t + \sin t$, continuă pe R.	
Atunci $g = h \circ f$ este continuă pe R, astfel g admite primitive.	1p
„ $\Leftarrow$ " Știm că g admite primitive, prin urmare g are proprietatea lui Darboux.	
Cum h e continuă și inversabilă, avem h^{-1} continuă.	1p
$f = h^{-1} \circ g$. Funcția h^{-1} continuă, prin urmare h^{-1} are proprietatea lui Darboux și, cum funcția g are proprietatea lui Darboux, obținem că f are proprietatea lui Darboux.	1p
Cum f este și injectivă, rezultă că f este strict monotonă.	
O funcție monotonă ce are proprietatea lui Darboux este continuă, prin urmare admite primitive.	1p
TOTAL	**7p**