Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureş – 18 februarie 2023
Clasa a XI - a

Barem de corectare și notare

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $C = AB - BA$, astfel încât $\det(C) = -4$.

a) Aflați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $C^2 = a \cdot I_2$.

b) Calculați $\det(-2I_2 + C)$ și $\det(I_2 - C^{2022})$.

Soluție.

a) $Tr(C) = Tr(A \cdot B - B \cdot A) = 0$ *și* $\det(C) = -4$ **1p**

din Cayley- Hamilton avem $C^2 - Tr(C) \cdot C + \det(C) \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow C^2 = 4 \cdot I_2 \Rightarrow a = 4$.....**2p**

b) $\det(2C - C^2) = \det(2C - 4 \cdot I_2) \Rightarrow \det(C) \cdot \det(2I_2 - C) = \det(2(C - 2 \cdot I_2))$

$\Rightarrow -4\det(2I_2 - C) = 4\det(C - 2 \cdot I_2) \Rightarrow \det(2I_2 - C) = 0$ **2p**

$\det(I_2 - C^{2022}) = \det(I_2 - (4I_2)^{1011}) = \det\left(\left(1 - 4^{1011}\right)I_2\right) = \left(4^{1011} - 1\right)^2$. **2p**

2. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 = \left(2 + \sqrt{3}\right)(A \cdot B - B \cdot A)$. Dacă $\det(A^2 + B^2) \neq 0$, demonstrați că n se divide cu 12.

Soluție.

Fie $X, \overline{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), X = A + Bi, \overline{X} = A - Bi$

$X\overline{X} = A^2 + B^2 + i(BA - AB) \Rightarrow \det(X\overline{X}) = \det\left(\left(2 + \sqrt{3} - i\right)(A \cdot B - B \cdot A)\right) \Rightarrow$.....**2p**

$|\det(X)|^2 = \left(2 + \sqrt{3} - i\right)^n \det(A \cdot B - B \cdot A)$ **1p**

Cum $|\det(X)|^2 \in \mathbb{R}$ și $\det(A \cdot B - B \cdot A) \neq 0 \Rightarrow \left(2 + \sqrt{3} - i\right)^n \in \mathbb{R}$ **2p**

$$\left(2 + \sqrt{3} - i\right)^n = 2^n\left(1 + \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^n = 2^{2n}\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)^n \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \sin\frac{n\pi}{12} = 0 \Rightarrow n$ se divide cu 12. ..... **2p**

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale astfel încât $a_1 > 0$ și $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

a) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

b) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$.

(Suplimentul G.M.10/2022)

Soluție.

a) $a_n > 0, \forall\, n \geq 1$ (inducție matematică) **1p**

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} > 0, \forall\, n \geq 1 \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ e strict crescător$\Rightarrow$ există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$....**1p**

Presupunem că $L \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \Rightarrow L = L + \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{1}{L} = 0$, contradicție$\Rightarrow L = \infty$..**1p**

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{\sqrt{2n}}\right)^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{2n+2-2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 - a_n^2}{2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{a_n^2}\right) = 1$ **3p**

$\frac{a_n}{\sqrt{2n}} > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$. **1p**

4. Considerăm șirul $(x_n)_{n\geq 1}$,

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton și mărginit.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(e^{x_{n+1}} - e^{x_n}\right)$ știind că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ln 2$.

Soluție.

a) $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0, \forall\, n \geq 1 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ e strict crescător.... **1p**

$x_1 = \frac{1}{2} \leq x_n, \forall\, n \geq 1$ și $x_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1, \forall\, n \geq 1$ **2p**

b)

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(e^{x_{n+1}} - e^{x_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 e^{x_n}\left(e^{x_{n+1}-x_n} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 e^{x_n} \frac{e^{x_{n+1}-x_n}-1}{x_{n+1}-x_n} \cdot (x_{n+1} - x_n)$ **2p**

$= e^{\ln 2} \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot (x_{n+1} - x_n) = 2 \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 2 \cdot \frac{1}{4} = 2$ **2p**