

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICA

### ETAPA LOCALĂ

18 .02.2023

### CLASA a VIII-a

**Problema 1.** Se consideră expresiile  $E(x) = 4x^4 - 3x^3 - 1$  și  $G(x) = x(2x-1)(1-x)(2x+1)$

- a) Arătați că  $E(x) + G(x) = (x-1)(x+1)^2$
- b) Demonstrați că  $E(n) + G(n) : 16$ , pentru orice  $n$ , număr întreg impar.
- c) Fie  $A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{2023}-\sqrt{2022}}{\sqrt{2022 \cdot 2023}}$   
Calculați  $E(a)$ , știind că  $a = \frac{[A \cdot \sqrt{2023}]}{43}$ , unde  $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului  $x$ .

**Problema 2.** Fie numerele reale  $x$  și  $y$ , astfel încât  $x^2 + 2x + 1 = y^2 + 4$ .

- a) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $x$  pentru care este îndeplinită egalitatea.
- b) Aflați perechile de numere întregi  $(x, y)$  care verifică egalitatea dată.

**Problema 3.** Pe planul rombului  $ABCD$ , cu  $m(\angle A) = 60^\circ$  și  $AB = 2a$  (unde  $a > 0$ ), se construiesc

perpendicularele  $MA$  și  $PB$ , în același semiplan față de  $AB$ , astfel încât  $AM = BD = BP$ .

- a) Arătați că  $d(P, AC) + d(M, BD) < 5a$ ;
- b) Demonstrați că planele  $(MBD)$  și  $(MAC)$  sunt perpendiculare.

**Problema 4.** Un paralelipiped dreptunghic are suma ariilor a câte două fețe alăturate de  $32 \text{ m}^2$ ,  $35 \text{ m}^2$ , respectiv  $27 \text{ m}^2$ . Aflați lungimea diagonalei paralelipipedului.

(Gazeta matematică S:E 22.360)

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problema se notează de la 0 la 7 puncte.  
Pe foaia de concurs se vor scrie rezolvările complete.  
Timp de lucru 3 ore.