Olimpiada Națională de Matematică 2023

Etapa locală – Iași, 10 februarie 2023

Clasa a X-a

Barem de notare și evaluare

Problema 1. Determinați $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $5z^2 - z \in \mathbb{R}$ și $5z^2 - z \le 4$.

Soluție: Fie $z = a + bi$. Atunci $5z^2 - z = 5a^2 - 5b^2 - a + (10ab - b)i$, deci $b(10a - 1) = 0$ **2p**

Dacă $b = 0$, atunci $5a^2 - a \le 4$, adică $-\frac{4}{5} \le a \le 1$ **3p**

Dacă $a = \frac{1}{10}$, atunci $\frac{5}{100} - 5b^2 - \frac{1}{10} \le 4$ care este adevărată pentru orice b **2p**

Problema 2. Rezolvați în intervalul $(0, \infty)$ ecuația $\sqrt{25 - x^{\lg 9}} + 3^{\lg x} = 7$.

Soluție:

Notăm $t = 3^{\lg x}$; $x^{\lg 9} = 9^{\lg x} = \left(3^{\lg x}\right)^2 = t^2$ **2p**

Ecuația devine $\sqrt{25 - t^2} + t = 7 \Rightarrow t^2 - 7t + 12 = 0$ **2p**

Obținem $t = 3$ sau $t = 4$ **1p**

Avem $x = 10$ sau $x = 4^{\frac{1}{\lg 3}}$ **2p**

Problema 3. Fie $a \in (1, \infty)$ și funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{a+1}{a}\right)^x - \frac{1}{a^x} - 1$.

a) Arătați că funcția f este injectivă.

b) Fie $n \ge 2$ un număr natural. Rezolvați ecuația $(x+n)^{\log_n(n+1)} = 1 + (x+n+1)^{\log_{n+1} n}$.

Soluție:

a) $\left(\frac{a+1}{a}\right)^x$ funcție strict crescătoare, $-\left(\frac{1}{a}\right)^x$ funcție strict crescătoare deorece $a > 1$, deci funcția f este strict crescătoare, prin urmare injectivă. **1p**

b) Observăm că ecuația dată are soluția $x = 0$ **1p**

Arătăm că este unica soluție. Ecuația dată se rescrie sub forma

$(x+n)^{\log_n(n+1)}+x+n=x+n+1+(x+n+1)^{\log_{n+1}n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n+1)^{\log_n(x+n)}+n^{\log_n(x+n)}=(n+1)^{\log_{n+1}(x+n+1)}+n^{\log_{n+1}(x+n+1)}$ **2p**

Considerând funcția $g:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $g(x)=n^x+(n+1)^x$, ecuația se rescrie $g(\log_n(x+n))=g(\log_{n+1}(x+n+1))$ și cum funcția g este injectivă, rezultă $\log_n(x+n)=\log_{n+1}(x+n+1)=y$ **1p**

Se obține $\begin{cases} x+n=n^y \\ x+n+1=(n+1)^y \end{cases} \Rightarrow (n+1)^y-n^y=1$ **1p**

De aici $\Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^y-\frac{1}{n^y}-1=0$, deci conform cu punctul *a)*, din injectivitatea funcției *f*, unica soluție este $y=1\Rightarrow x=0$. **1p**

Problema 4.

a) Considerăm numerele complexe a și b de același modul. Știind că $|2a+3b|=|b+4a|$, arătați că $a=b$.

b) Considerăm numerele complexe a, b și c de același modul. Știind că $|2a+3b|=|2b+3c|=|2c+3a|$, arătați că triunghiul cu vârfurile în punctele de afixe a, b și c este echilateral.

Soluție:

a) Notăm $r=|a|=|b|$. Ridicăm la pătrat relația dată și obținem $2r^2=a\bar{b}+\bar{a}b$ ……..….**2p**

Observăm că $|a-b|^2=2r^2-a\bar{b}-\bar{a}b=0\Rightarrow a=b$ …….....**1p**

b) Ridicăm la pătrat și obținem $13r^2+6a\bar{b}+6\bar{a}b=13r^2+6b\bar{c}+6\bar{b}c\Rightarrow a\bar{b}+\bar{a}b=b\bar{c}+\bar{b}c$ …… **2p**

Observăm că $|a-b|^2=2r^2-a\bar{b}-\bar{a}b=2r^2-b\bar{c}-\bar{b}c=|b-c|^2$

Analog, $|a-b|^2=|a-c|^2$ ……..**1p**

Se obține $|a-b|^2=|b-c|^2=|a-c|^2$, deci triunghiul este echilateral ……...…… **1p**

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro