Olimpiada de Matematică – etapa locală – Galați
11 februarie 2023

Clasa a 7-a

Soluții

Problema 1.

a) Să se demonstreze inegalitatea: $\frac{1}{\sqrt{37}}+\frac{1}{\sqrt{45}}+\frac{1}{\sqrt{61}}<\frac{1}{\sqrt{27}}+\frac{1}{\sqrt{32}}+\frac{1}{\sqrt{48}}$.

b) Să se determine numerele raționale a și b, știind că:

$$(2\cdot a+b)\cdot\sqrt{27}+(a-3\cdot b)\cdot\sqrt{2}=(a+2\cdot b-22)\cdot\sqrt{3}+(b-10)\cdot\sqrt{8}.$$

Soluție. a) Avem că $37>27\Leftrightarrow\sqrt{37}>\sqrt{27}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{37}}<\frac{1}{\sqrt{27}}$

$45>32\Leftrightarrow\sqrt{45}>\sqrt{32}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{45}}<\frac{1}{\sqrt{32}}$

$61>48\Leftrightarrow\sqrt{61}>\sqrt{48}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{61}}<\frac{1}{\sqrt{48}}$

Adunând inegalitățile $\frac{1}{\sqrt{37}}<\frac{1}{\sqrt{27}}$

$\frac{1}{\sqrt{45}}<\frac{1}{\sqrt{32}}$

$\frac{1}{\sqrt{61}}<\frac{1}{\sqrt{48}}$ obținem:

$$\frac{1}{\sqrt{37}}+\frac{1}{\sqrt{45}}+\frac{1}{\sqrt{61}}<\frac{1}{\sqrt{27}}+\frac{1}{\sqrt{32}}+\frac{1}{\sqrt{48}}.$$

b) $(2\cdot a+b)\cdot\sqrt{27}+(a-3\cdot b)\cdot\sqrt{2}=(a+2\cdot b-22)\cdot\sqrt{3}+(b-10)\cdot\sqrt{8}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(2\cdot a+b)\cdot 3\cdot\sqrt{3}+(a-3\cdot b)\cdot\sqrt{2}=(a+2\cdot b-22)\cdot\sqrt{3}+(b-10)\cdot 2\cdot\sqrt{2}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(2\cdot a+b)\cdot 3\cdot\sqrt{3}-(a+2\cdot b-22)\cdot\sqrt{3}=(b-10)\cdot 2\cdot\sqrt{2}-(a-3\cdot b)\cdot\sqrt{2}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(5\cdot a+b+22)\cdot\sqrt{3}=(5\cdot b-a-20)\cdot\sqrt{2}.$

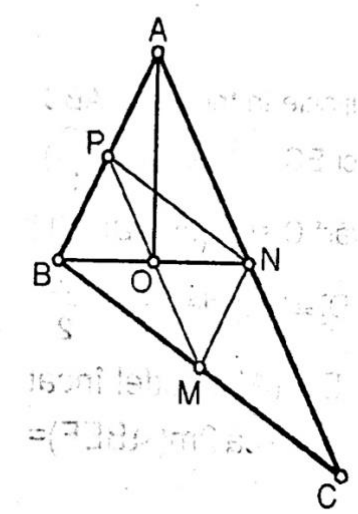
Presupunem că $5\cdot b-a-20\neq 0$. Din ultima relație deducem că
$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{5\cdot a+b+22}{5\cdot b-a-20}\Leftrightarrow\sqrt{6}=\frac{3\cdot(5\cdot a+b+22)}{5\cdot b-a-20}\in\mathbb{Q}$, adică $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$ ceea ce reprezintă o contradicție.
Deci, presupunerea făcută este falsă, de unde rezultă $5\cdot b-a-20=0$ și folosind relația $(5\cdot a+b+22)\cdot\sqrt{3}=(5\cdot b-a-20)\cdot\sqrt{2}$, deducem că $5\cdot a+b+22=0$.
Am obținut că $5\cdot a+b=-22$ și $5\cdot b-a=20$, de unde rezultă că $a=-5$ și $b=3$.

Problema 2. Se consideră triunghiul *ABC* în care bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ și mediana laturii AC sunt perpendiculare; fie *O* punctul lor de intersecție. Se notează cu *M*, *N*, *P*, respectiv, mijloacele laturilor *BC*, *CA*, *AB*. Demonstrați că:

a) punctele *M*, *O* și *P* sunt coliniare;

b) $MN \equiv MO$.

Prima soluție. a) Deoarece $AO \perp BN$ și $\sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle NAO$ rezultă că $AB \equiv AN$ și $BO \equiv ON$. Având în vedere și faptul că $BP \equiv PA$, deducem că *PO* este linie mijlocie în triunghiul *ABN*, ceea ce implică $PO \parallel AN$ sau $PO \parallel AC$. Totodată $PM \parallel AC$ (căci *PM* este linie mijlocie în triunghiul *ABC*), deci $O \in PM$ (fiindcă printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă). În consecință, punctele *M*, *O* și *P* sunt coliniare.
b) Întrucât $MN = \frac{AB}{2}$ (căci *MN* este linie mijlocie în triunghiul *ABC*), $OM = \frac{CN}{2}$ (fiindcă *OM* este linie mijlocie în triunghiul *BCN*) și $AB = CN$ (căci $AB = AN$ și $AN = CN$), rezultă că $MN = OM$, deci $MN \equiv OM$.



A doua soluție. a) Deoarece *MN* este linie mijlocie în triunghiul *ABC*, rezultă că $MN \parallel AB$ și $MN = \frac{AB}{2}$. Cum $BP = \frac{AB}{2}$, rezultă că $MN \equiv BP$, ceea ce împreună cu $MN \parallel BP$, arată că patrulaterul *BMNP* este paralelogram. Din $AO \perp BN$ și $\sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle NAO$, deducem $BO \equiv ON$, deci O este centrul paralelogramului *BMNP* și, cum *PM* este o diagonală a paralelogramului, rezultă că $O \in PM$.
b) Întrucât în triunghiul *ABO* (dreptunghic în *O*) segmentul *OP* este mediana corespunzătoare ipotenuzei, rezultă că $OP = \frac{AB}{2} = BP$. Având în vedere că patrulaterul *BMNP* este paralelogram, iar *O* este centrul său, deducem $MN = BP$ și $OP = OM$.
Ca urmare a celor stabilite anterior, $MN \equiv OM$.

Problema 3. Se consideră următorul tabel în care linia *n* conține *n* numere:

$\sqrt{1}$						
$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$					
$\sqrt{7}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{11}$				
$\sqrt{13}$	$\sqrt{15}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{19}$			
$\sqrt{21}$	$\sqrt{23}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{29}$		
$\sqrt{31}$	$\sqrt{33}$	$\sqrt{35}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{39}$	$\sqrt{41}$	
…	…	…	…	…	…	…

a) Să se determine câte linii ale tabelului au primul element un număr rațional.
b) Să se calculeze partea întreagă a primului element de pe linia 2023.

Soluție. a) Considerăm șirul format cu numerele naturale care se află sub primul radical de pe fiecare linie: 1, 3, 7, 13, 21, 33, …. , *x*, unde *x* este numărul aflat sub primul radical de pe linia a *n*-a.
Observăm că:

Linia 1 $\quad 1 = 1$
Linia 2 $\quad 3 = 1 + 2$
Linia 3 $\quad 7 = 1 + 2 + 4$
Linia 4 $\quad 13 = 1 + 2 + 4 + 6$
Linia 5 $\quad 21 = 1 + 2 + 4 + 6 + 8$
Linia 6 $\quad 31 = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10$
…………………………………………………………
Linia *n* $\quad x = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + (2 \cdot n - 2)$

Deci, $x = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + (2 \cdot n - 2) = 1 + 2 \cdot \big(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1)\big)$
$x = 1 + 2 \cdot \big(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1)\big) = 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{2} = n^2 - n + 1.$
Prin urmare, primul număr de pe linia *n* este $\sqrt{n^2 - n + 1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru orice $n \geq 2$ avem că $(n-1)^2 = n^2 - 2 \cdot n + 1 < n^2 - n + 1 < n^2$, deci $n^2 - n + 1$ nu este pătrat perfect pentru orice $n \geq 2$, de unde deducem că $\sqrt{n^2 - n + 1} \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, pentru orice $n \geq 2$.
Prin urmare, doar pentru $n = 1$ avem $\sqrt{1} = 1$, număr rațional.

Răspuns: o singură linie are primul element număr rațional și anume, prima linie.

b) Am demonstrat mai sus că $n - 1 < \sqrt{n^2 - n + 1} < n$, pentru orice $n \geq 2$, de unde rezultă că $\left[\sqrt{n^2 - n + 1}\right] = n - 1$, pentru orice $n \geq 2$, iar $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.
Primul element de pe linia 2023 este $\sqrt{2023^2 - 2023 + 1}$ și $\left[\sqrt{2023^2 - 2023 + 1}\right] = 2022$.

Problema 4. Fie E un punct pe latura DC a pătratului $ABCD$, AN bisectoarea unghiului $\sphericalangle EAB$, $N \in BC$ și P punctul de intersecție a dreptelor AE și BC. Perpendiculara din P pe NE intersectează dreapta DC în M. Demonstrați că:

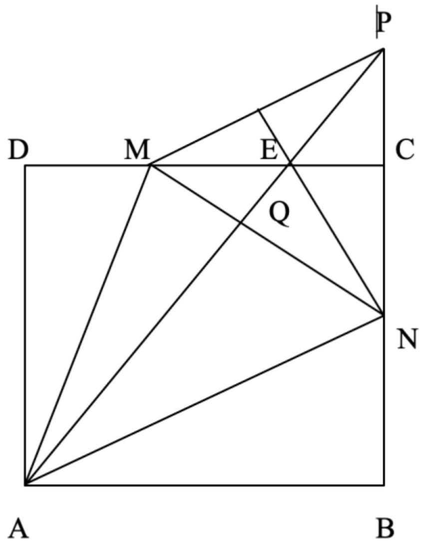
a) NA este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MNB$;

b) $MN = DM + BN$;

c) $\sphericalangle MAN = 45°$.

Problema E:16397 din GM nr.10/2022

Soluție.



a) Fie $\{Q\} = AP \cap MN$.
În triunghiul MNP, $MC \perp PN, NE \perp MP$, de unde rezultă că E este ortocentrul triunghiului MNP. Prin urmare, $PQ \perp MN$.

Triunghiurile NAB și NAQ sunt congruente,
deoarece $AN \equiv AN, \sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle NAQ$ și $\sphericalangle NBA = \sphericalangle NQA = 90°$,
de unde rezultă că $\sphericalangle BNA \equiv \sphericalangle QNA,\ QN \equiv BN$ și $AQ \equiv AB$ și mai departe obținem că NA este bisectoarea $\sphericalangle MNB$.

b) Triunghiurile MQA și MDA sunt congruente,
deoarece $AM \equiv AM, AQ \equiv AD$ și $\sphericalangle MQA = \sphericalangle MDA = 90°$, de unde rezultă că $\sphericalangle QAM \equiv \sphericalangle DAM$ și $QM \equiv DM$ și mai departe obținem că $MN = DM + BN$.

c) Avem că $\sphericalangle DAM \equiv \sphericalangle MAQ$, $\sphericalangle QAN \equiv \sphericalangle NAB$ și $\sphericalangle DAB = 90°$,
de unde obținem că $\sphericalangle MAN = 45°$,