INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BUZĂU

MINISTERUL EDUCAŢIEI

BAREM ORIENTATIV DE CORECTARE ŞI NOTARE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală- 2023

CLASA a VII-a

PROBLEMA 1

Fie mulţimile $A=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{4}{3}\langle\frac{n+1}{6}\langle\frac{7}{4}\right\}$, $B=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{n^2-4n+8}{n-4}\in\mathbb{N}\right\}$;
Să se determine: $A\cup B; A\cap B$.

SOLUŢIE:

După ce se aduce la acelaşi numitor comun se obţine:

$16\le 2n+2\langle 21\Leftrightarrow 14\le 2n\langle 19;\quad 7\le n\langle\frac{19}{2}; n\in N\Rightarrow n\in\{7,8,9\}$, aşadar $A=\{7,8,9\}$ **3p**

$$\frac{n^2-4n+8}{n-4}=\frac{n(n-4)+8}{n-4}=n+\frac{8}{n-4}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n-4\in D_8=\{1,2,4,8\}\Rightarrow$$

$n\in\{5,;6;8;12\}\quad\Rightarrow B=\{5,6,8;9\}$ **3p**

$\Rightarrow A\cap B=\{8\},\quad A\cup B=\{5;6;7;8;9;12\}$ **1p**

PROBLEMA 2

Comparați numerele reale x și y, știind că:

$$x=\sqrt{5^{2023}-4\cdot 5^{2022}-4\cdot 5^{2021}-\ldots-4\cdot 5-4}-\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}-\left|\sqrt{7}-3\right| \text{ și}$$

$$y=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{\sqrt{2023}-\sqrt{2022}}{\sqrt{2022\cdot 2023}}$$

SOLUŢIE:

$x=\sqrt{5^{2023}-4\cdot(5^{2022}+5^{2021}+\ldots+5+1)}-\left|2-\sqrt{7}\right|-\left|\sqrt{7}-3\right|$ **1p**

Calculăm $S=5^{2022}+5^{2021}+\ldots+5+1$. Înmulțim relația cu 5 și avem:

$5S=5^{2023}+5^{2022}+\ldots+5^2+5$. Prin scădere avem $4S=5^{2023}-1$.....**1p**

$x=\sqrt{5^{2023}-(5^{2023}-1)}-\left(\sqrt{7}-2\right)-\left(3-\sqrt{7}\right)=1-\sqrt{7}+2-3+\sqrt{7}=0$ **1p**

$y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot\sqrt{4}}} + \ldots + \frac{\sqrt{2023}}{\sqrt{2022}\cdot\sqrt{2023}} - \frac{\sqrt{2022}}{\sqrt{2022}\cdot\sqrt{2023}}$ **1p**

$y = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2022}} - \frac{1}{\sqrt{2023}}$ **1p**

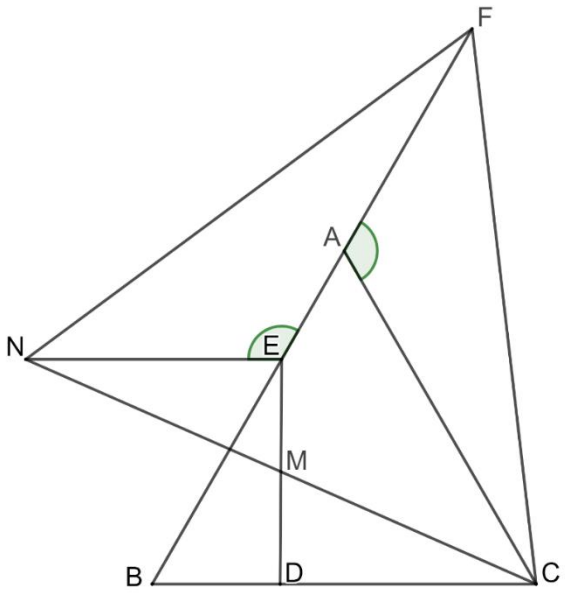
$y = 1 - \frac{1}{\sqrt{2023}}$ **1p**

$x < y$ **1p**

PROBLEMA 3

Se consideră triunghiul echilateral ABC și punctele D, E pe laturile BC, respectiv AB și F pe semidreapta BA cu punctul A între B și F astfel încât $CD = BE = AF$. Dacă M este mijlocul lui DE și N simetricul lui C față de M, arătați că triunghiul FNC este echiateral.

SOLUȚIE:



M mijlocul lui DE și al lui $CN \Longrightarrow CDNE$ paralelogram $\Longrightarrow CD = NE$ și $CD \parallel NE$ **1p**

$CD = NE$ și $CD = BE = AF \Longrightarrow NE = AF$ (1)

$CD \parallel NE, BE$ secantă$\Longrightarrow \sphericalangle CBE = \sphericalangle BEN = 60° \Longrightarrow \sphericalangle NEF = 120° = \sphericalangle FAC$(2) **1p**

$EF = EA + AF = EA + BE = AB = AC \Longrightarrow EF = AC$ (3) **1p**

Din relațiile (1), (2) și (3) $\Longrightarrow \Delta ENF \equiv \Delta AFC$ **1p**

Cum $\Delta ENF \equiv \Delta AFC \Longrightarrow FN = CF \Longrightarrow \Delta FNC$ isoscel de bază CN (4). **1p**

$\Delta ENF \equiv \Delta AFC \Longrightarrow \sphericalangle EFN = \sphericalangle ACF \Longrightarrow \sphericalangle CFN = \sphericalangle CFE + \sphericalangle EFN = \sphericalangle CFE + \sphericalangle ACF =$

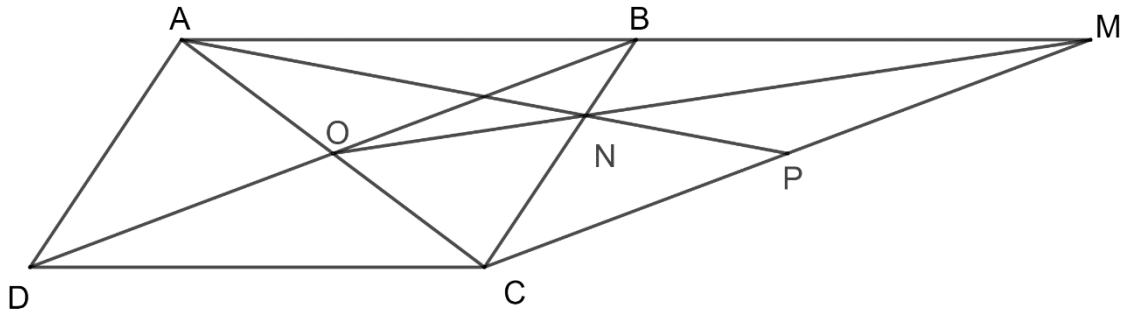
$= 180° - \sphericalangle CAF = 180° - 120° = 60°$ (5) **1p**

Din relațiile (4) și (5) $\Longrightarrow \Delta FNC$ este echilateral **1p**

PROBLEMA 4

Se consideră paralelogramul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$. Fie M simetricul lui A față de B, $OM \cap BC = \{N\}$ și $AN \cap CM = \{P\}$.

a) Arătați că $OPBA$ este paralelogram.
b) Dacă $\mathcal{A}_{MNP} = 25$ cm^2, calculați aria lui $ABCD$.



SOLUȚIE:

a) În ΔACM avem MO mediană, CB mediană și $MO \cap CB = \{N\} \Rightarrow N$ centru de greutate al triunghiului ACM **1p**

N centru de greutate al triunghiului $ACM, N \in AP \Rightarrow AP$ mediană **1p**

O mijlocul lui AC, P mijlocul lui $MC \Longrightarrow OP$ linie mijlocie în ΔACM **1p**

$\Longrightarrow OP \parallel AM$ și $OP = \frac{AM}{2} = AB \Rightarrow OABP$ paralelogram **1p**

b) N centru de greutate al triunghiului $ACM \Rightarrow \mathcal{A}_{MNP} = \mathcal{A}_{NPC} = \mathcal{A}_{CNO} =$

$\mathcal{A}_{ONA} = \mathcal{A}_{ANB} = \mathcal{A}_{BNM} = 25$ cm^2 ..... **1p**

$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABN} + \mathcal{A}_{ANO} + \mathcal{A}_{CNO} = 75$ cm^2 . . . . **1p**
$\mathcal{A}_{ABCD} = 2\mathcal{A}_{ABC} = 150$ cm^2 . . . . **1p**