INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BUZĂU

MINISTERUL EDUCAŢIEI

BAREM ORIENTATIV DE CORECTARE ŞI NOTARE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

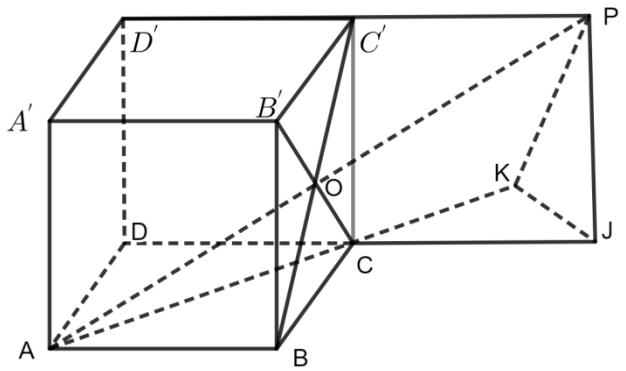
Etapa locală- 2023

CLASA a VIII-a

PROBLEMA 1

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu muchia de 4 cm și $BC' \cap B'C = \{O\}$. Dacă $\{P\} = AO \cap C'D'$, determinați distanța de la punctul P la dreapta AC.

SOLUŢIE:



Fie $PJ \parallel CC'$, $J \in DC$ și cum $CC' \perp (ABC) \Rightarrow PJ \perp (ABC)$ (1).....**1p**

Fie $JK \perp AC$, $K \in AC$ (2) Din (1) și (2) $\overset{T_3\perp}{\Longrightarrow} PK \perp AC$ **2p**

$\Delta AOB \equiv \Delta POC' \Rightarrow C'P = AB = CJ = 4cm$ **1p**

În ΔCKJ dreptunghic isoscel$\Rightarrow KJ = 2\sqrt{2}cm$ **2p**

Din triunghiul dreptunghic PJK se află $PK=2\sqrt{6}$.....**1p**

PROBLEMA 2

Demonstrați că

$$\sqrt{2022\cdot 2023+\sqrt{2022\cdot 2023+\sqrt{2022\cdot 2023+\cdots+\sqrt{2022\cdot 2023+\sqrt{2022\cdot 2023}}}}}<2023$$

SOLUŢIE:

$\sqrt{2022\cdot 2023}<\sqrt{2023^2}=2023$.....**2p**

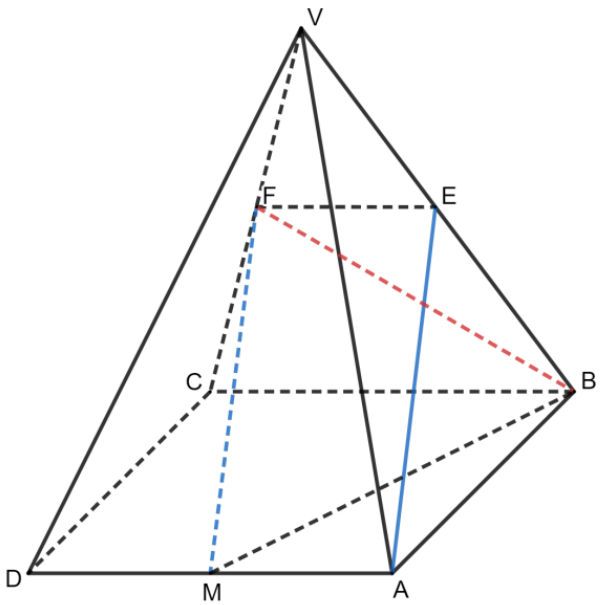
$\Rightarrow\sqrt{2022\cdot 2023+\sqrt{2022\cdot 2023}}<\sqrt{2022\cdot 2023+2023}=$
$\sqrt{2023\cdot(2022+1)}=2023$ **3p**

Aplicând succesiv aceste inegalități rezultă cerința.....**2p**

PROBLEMA 3

VABCD este o piramidă patrulateră regulată cu toate muchiile de lungime $2a, a\in\mathbb{R}_+^*$ iar E și F sunt mijloacele muchiilor BV și CV. Calculați sinusul unghiului format de dreptele AE și BF.

SOLUŢIE:



EF este linie mijlocie în $\Delta VBC \Rightarrow EF \parallel BC \parallel AD$ și $EF=\frac{BC}{2}=\frac{AD}{2}=a$ **1p**

Fie M mijlocul muchiei AD și astfel $EF \parallel AM$ și EF=AM=a⇒ EFMA este paralelogram..**1p**

$FM \parallel AE \Rightarrow \measuredangle(BF, AE) = \measuredangle(BF, FM) = \measuredangle BFM$ **1p**

Cum $AE=BF=a\sqrt{3}$ atunci ΔBFMeste isoscel de bază $BM=a\sqrt{5}$.....**1p**

În ΔBFM se duce înălțimea pe bază care va avea lungimea $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ **1p**

$\mathcal{A}_{\Delta BFM}=\frac{a\sqrt{5}\cdot\frac{a\sqrt{7}}{2}}{2}=\frac{a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{3}\cdot\sin(\measuredangle BFM)}{2}$ **1p**

$\sin(\measuredangle BFM)=\frac{\sqrt{35}}{6}$.....**1p**

PROBLEMA 4

Se consideră inegalitatea $4x^2+9y^2-12\sqrt{2}x-12\sqrt{3}y+30\leq 0, x, y\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine x și y
b) Calculați $\left\{\frac{x+y}{2x-3y}\right\}$, unde {a} reprezintă partea fracționară a numărului real a.

SOLUŢIE:

$4x^2+9y^2-12\sqrt{2}x-12\sqrt{3}y+30=\left(2x-3\sqrt{2}\right)^2+\left(3y-2\sqrt{3}\right)^2\leq 0$ **1p**

cum $\left(2x-3\sqrt{2}\right)^2\geq 0$ și $\left(3y-2\sqrt{3}\right)^2\geq 0\Rightarrow\left(2x-3\sqrt{2}\right)^2+\left(3y-2\sqrt{3}\right)^2=0$.....**1p**

$\Rightarrow 2x-3\sqrt{2}=0$ și $3y-2\sqrt{3}=0\Rightarrow x=\frac{3}{\sqrt{2}}$ și $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$.....**1p**

$\frac{x-y}{2x-3y}=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{6}{\sqrt{2}}-\frac{6}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}}{\frac{6(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{6}}}=\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{5+\sqrt{6}}{6}$ **1p**

$\left\{\frac{5+\sqrt{6}}{6}\right\}=\frac{5+\sqrt{6}}{6}-\left[\frac{5+\sqrt{6}}{6}\right]$ **1p**

$1<\frac{5+\sqrt{6}}{6}<2\Rightarrow\left[\frac{5+\sqrt{6}}{6}\right]=1$ **1p**

$\left\{\frac{5+\sqrt{6}}{6}\right\}=\frac{5+\sqrt{6}}{6}-1=\frac{\sqrt{6}-1}{6}$ **1p**