INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ALBA
Str. Gabriel Bethlen, Nr. 7, Alba Iulia, 510009
Telefon: 0258 817255, Fax: 0258 817663
secretariat@mail.albanet.ro, www.isj.albanet.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Olimpiada Naţională de Matematică
Județul ALBA - etapa locală -11 februarie, 2023

## SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a XII-a

**Problema 1.**

Fie $(G,\cdot)$ un grup cu 35 de elemente şi $f: G \to G$ un endomorfism al grupului $G$, cu proprietatea $f\big(xf(xy)\big) = y^9 f(x^4), (\forall) x, y \in G$.

a) Să se arate că $f$ este injectivă;

b) Să se arate că $G$ este abelian.

**Soluţie şi barem:**

a) • $|G| = 35 \Longrightarrow x^{35} = e \Longrightarrow x^{36} = x, (\forall)\, x \in G$ ..... **1p**

• Pentru $x = e \Longrightarrow f\big(f(y)\big) = y^9, (\forall)\, x \in G$ ..... **1p**

• $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1^9 = x_2^9 \Longrightarrow x_1^{36} = x_2^{36} \Longrightarrow x_1 = x_2$ ..... **1p**

b) • Pentru $y = e \Longrightarrow f(x) = x^3, (\forall)\, x \in G$ ..... **1p**

• $(xy)^3 = x^3y^3 \Leftrightarrow xyxyxy = xx^2y^2y \Leftrightarrow (yx)^2 = x^2y^2, (\forall)\, x, y \in G$ ..... **1p**

• $(xy)^3 = x^3y^3 \Leftrightarrow xy(xy)^2 = x^3y^3 \Leftrightarrow y^3x^2 = x^2y^3, (\forall)\, x, y \in G$ ..... **1p**

• $(y^3)^{12}(x^2)^{18} = (x^2)^{18}(y^3)^{12} \Leftrightarrow y^{36}x^{36} = x^{36}y^{36} \Leftrightarrow xy = yx, (\forall)\, x, y \in G$ ..... **1p**

**Problema 2.**

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit de ordin $m \cdot n$, unde $m$ şi $n$ sunt numere naturale prime între ele şi $f$ un endomorfism al grupului $G$.

a) Să se arate că mulţimea $H = \{x \in G | f(x) = x\}$ este subgrup al grupului $G$.

b) Să se determine $f$ ştiind că există $a, b \in G$, având ordinul $m$ respectiv $n$, astfel încât $f(a) = a$ şi $f(b) = b$.

**Soluţie şi barem:**

a) • Dacă $x, y \in H$, atunci $f(xy) = f(x)f(y) = xy \Longrightarrow xy \in H$ ..... **2p**

• $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = x^{-1} \Longrightarrow x^{-1} \in H$ , deci $H$ este subgrup al lui $G$ ..... **1p**

b) • $f(a) = a \Longrightarrow a \in H \Longrightarrow m$ divide ordinul lui $H$ ..... **1p**

• $f(b) = b \Longrightarrow b \in H \Longrightarrow n$ divide ordinul lui $H$ ..... **1p**

• $(m, n) = 1 \Longrightarrow mn$ divide ordinul lui $H$ , de unde $|H| = mn$ ..... **1p**

• $H = G$, ceea ce implică $f(x) = x, (\forall) x \in G$ ..... **1p**

**Problema 3.**

Se consideră o funcţie derivabilă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $F$ o primitivă a sa cu proprietatea că există un număr $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} \neq f(c), (\forall) a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$.

Să se arate că $f'(c) = 0$.

**Soluţie şi barem:**

- $F(b) - bf(c) \neq F(a) - af(c), (\forall) a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ .....**1p**
- $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(x) = F(x) - xf(c)$ pentru care $G(a) \neq G(b), (\forall) a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ , adică $G$ este injectivă .....**2p**
- $G$ injectivă şi continuă (fiind derivabilă) rezultă $G$ strict monotonă pe $\mathbb{R}$ .....**1p**
- $G$ derivabilă şi strict monotonă, rezultă că $G'(x) \geq 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$, sau $G'(x) \leq 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$ .....**1p**
- $G'(x) = f(x) - f(c)$, de unde $f(x) \geq f(c), (\forall) x \in \mathbb{R}$ sau $f(x) \leq f(c), (\forall) x \in \mathbb{R}$...**1p**
- $x = c$ punct de minim, respectiv maxim al funcţiei $f$ rezultă $f'(c) = 0$ .....**1p**

**Problema 4.**

Să se determine funcţiile $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ derivabile şi bijective, cu proprietatea

$$\int_0^{f^{-1}(x)} f(t)dt = x - 1,$$

pentru orice număr real $x > 0$.

Gazeta Matematică

**Soluţie şi barem:**

- considerăm o primitivă $F$ a funcţiei $f$ cu $F(0) = 0$. Egalitatea din enunţ se scrie echivalent $F\left(f^{-1}(x)\right) = x - 1, (\forall) x > 0$ .....**1p**
- prin derivarea egalităţii de mai sus obţinem $f\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}(x)\right)' = 1, (\forall) x > 0$, de unde $\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{x}$ , $(\forall) x > 0$ .....**2p**
- obţinem astfel $f^{-1}(x) = \ln x + c = \ln(kx)$ , $(\forall) x > 0$, unde $k$ este o constantă reală strict pozitivă .....**1p**
- $f(x) = \frac{1}{k} e^x = a \cdot e^x, (\forall) x \in \mathbb{R}$, unde $a$ este o constantă reală strict pozitivă .....**1p**
- Înlocuind în egalitatea din enunţ, vom avea $\int_0^{f^{-1}(x)} f(t)dt = \int_0^{\ln\frac{x}{a}} a \cdot e^t \, dt = a \cdot e^t \Big|_0^{\ln\frac{x}{a}} = x - a$. ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... . **1p**
- $a = 1$, deci funcţia căutată este funcţia $f(x) = e^x, (\forall) x \in \mathbb{R}$ .....**1p**