INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ALBA
Str. Gabriel Bethlen, Nr. 7, Alba Iulia, 510009
Telefon: 0258 817255, Fax: 0258 817663
secretariat@mail.albanet.ro, www.isj.albanet.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Olimpiada Naţională de Matematică
Județul ALBA - etapa locală -11 februarie, 2023

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a IX-a

Problema 1.

a) Să se arate că $x^3+2 \geq 3x, (\forall)\ x>0$.

b) Să se arate că $(\forall)\ a,b,c>0$, avem:

$$\frac{1}{(a+b)^3+2}+\frac{1}{(b+c)^3+2}+\frac{1}{(c+a)^3+2} \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Soluţie şi barem:

a) • $M_a \geq M_g \Longrightarrow \frac{x^3+1+1}{3} \geq \sqrt[3]{x^3\cdot 1\cdot 1}$ **2p**

• $x^3+2 \geq 3x, (\forall)\ x>0$..... **1p**

b) • $\frac{1}{(a+b)^3+2} \leq \frac{1}{3(a+b)} \Longrightarrow \sum \frac{1}{(a+b)^3+2} \leq \frac{1}{3}\sum \frac{1}{a+b}$.....**2p**

• $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ **1p**

• $\sum \frac{1}{(a+b)^3+2} \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.....**1p**

Problema 2.

Fie numerele reale x,y care verifică $[x+y]=[x]+[y]$ și $[-x-y]=[-x]+[-y]$. Să se arate că numerele x,y sunt numere intregi.

Soluţie şi barem:

• $x=[x]+\alpha, y=[y]+\beta;\ \alpha,\beta \in [0,1)$ **1p**

• $[x+y]=[x]+[y]+[\alpha+\beta], [-x-y]=-[x]-[y]+[-\alpha-\beta]$ **1p**

• $[-x]=-[x]+[-\alpha], [-y]=-[y]+[-\beta]$ **1p**

• Din ipoteză obținem $[\alpha+\beta]=0$ și $[-\alpha-\beta]=[-\alpha]+[-\beta]$.....**1p**

• $[\alpha+\beta]=0 \Longrightarrow \alpha+\beta \in [0,1)$.....**1p**

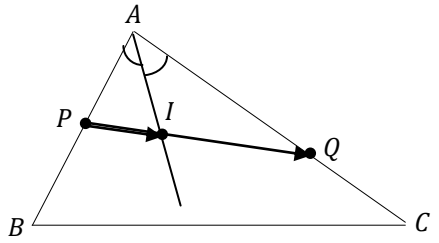
• Dacă $\alpha+\beta \in (0,1)$, din $[-\alpha-\beta]=[-\alpha]+[-\beta]$ rezultă $-\mathbf{1}=-\mathbf{2}$ (Fals).....**1p**

• Deci $\alpha+\beta=0$ și cum $\alpha,\beta \in [0,1) \Longrightarrow \alpha=\beta=0 \Longrightarrow x,y \in \mathbb{Z}$.....**1p**

Problema 3.

Se dă triunghiul ABC şi punctele $P \in (AB), Q \in (AC)$ astfel încât $\frac{PB}{PA} = \frac{AC}{BC}$ şi $\frac{QC}{QA} = \frac{AB}{BC}$.
Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Ştiind că $I \in PQ$, să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

Soluţie şi barem:

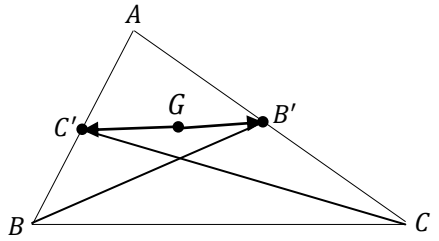


- $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = \frac{PA}{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{AQ}{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a}{a+b} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{a}{a+c} \cdot \overrightarrow{AC}$.....**2p**
- $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AP} = \frac{b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}}{a+b+c} - \frac{a}{a+b} \cdot \overrightarrow{AB}$ **2p**
- $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{a+b+c}\left(\frac{b^2-a^2-ac}{a+b} \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}\right)$.....**1p**
- $I \in PQ \Leftrightarrow$ vectorii $\overrightarrow{PI}$ şi $\overrightarrow{PQ}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \frac{b^2-a^2-ac}{-a} = \frac{c(a+c)}{a}$.....**1p**
- $a^2 + ac - b^2 = ac + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \overset{RTP}{\Longleftrightarrow} \Delta\, ABC$ este dreptunghic în A.....**1p**

Problema 4.

Se consideră triunghiul oarecare ABC cu centrul de greutate G și punctele B', C' picioarele bisectoarelor din B respectiv C. Să se arate că dacă punctele B', G și C' sunt coliniare, atunci $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$.

Soluţie şi barem:



- Cu teorema bisectoarei obținem $\overrightarrow{AC'} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AB'} = \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}$.....**2p**
- $\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AC'} = -\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}$.....**1p**
- $\overrightarrow{GB'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AG} = \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{2c-a}{a+c}\overrightarrow{AC}\right)$.....**2p**

• B', G, C' coliniare $\Leftrightarrow$ vectorii $\overrightarrow{C'B'}$ şi $\overrightarrow{GB'}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = \frac{c}{a+c} \cdot \frac{a+c}{2c-a}$ **1p**

• $b(2c-a) = c(a+b) \Leftrightarrow bc = ab + ac \ \ |: abc \Leftrightarrow \frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$.....**1p**