Olimpiada naţională de matematică

Etapa locală, 29.02.2020

Clasa a XI-a

BAREM DE CORECTARE

1.	***ENUNȚ.*** *a) Calculați:* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^k x}{x^2}$, $k\in N^*$. *b) Dacă* $n\in N^*$, *calculați:* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1-\cos^2 x)\cdot\ldots\cdot(1-\cos^n x)}{\sin^{2n}x+\ln(1+x^{2n})}$.	
	Prof. Traian Tămâian, Liceul Teoretic Carei	
	a) Avem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^k x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x+\ldots+\cos^{k-1}x)}{x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x+\ldots+\cos^{k-1}x)=\frac{k}{2}$.	**3p**
	b) $L=\lim\limits_{x\to 0}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1-\cos^k x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{2n}}{\sin^{2n}x+\ln(1+x^{2n})}=\lim\limits_{x\to 0}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1-\cos^k x}{x^2}$ $\frac{1}{(\frac{\sin x}{x})^{2n}+\frac{\ln(1+x^{2n})}{x^{2n}}}=\frac{n!}{2^{n+1}}$.	**4p**
2.	***ENUNȚ.*** *Fie șirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $a_1=a\in\boldsymbol{R}$ *și* $a_{n+1}=\frac{na_n+1}{n+1}$, $n\geq 1$. *a) Arătați că șirul este convergent și calculați limita lui.* *b) Calculați* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}}$.	
	Prof. Adrian Bud, Liceul Teoretic Negrești Oaș	
	$a=1\Longrightarrow a_n=1, \forall\, n\geq 1$	**1p**
	$a<1$ monoton crescător și mărginit. Limita este 1. Analog cazul $a>1$.	**2p** **1p**
	Verificarea aplicabilității teoremei Cesaro-Stolz Aplicarea teoremei și finalizare	**1p** **2p**

3.	***ENUNȚ.*** *Fie funcția* $f: M_2(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$, $f(A) = det(A^2 + I_2)$. *Să se arate că:* *a)* $f(A) = (detA - 1)^2 + (trA)^2, \forall A \in M_2(\mathbb{R})$. *b)* f *nu este injecție.*	
	Prof.dr. Ovidiu Pop, Colegiul Național „Mihai Eminescu" Satu Mare	
	Cu polinomul caracteristic	**3p**
	Dacă $\lambda \geq 0$ și considerăm $detA = 1, trA = \sqrt{\lambda}$. Ecuația devine $A^2 - \sqrt{\lambda}\,A + I_2 = O_2$, care are mai multe soluții.	**4p**
4.	***ENUNȚ.*** *a) Fie* $A \in M_2(C)$. *Arătați că* $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA)x + \det A$, *pentru orice* $x \in C$. *b) Dacă* $A \in M_2(C)$ *cu* $TrA = 2$ *şi* $\det A = 3$ *demonstrați că* $\sqrt{3 \cdot \det(A^2 + 3I_2)} - \sqrt{2 \cdot \det(A^2 + I_2)} = 2.$	
	Prof. Traian Tămâian, Liceul Teoretic Carei	
	Prin calcul direct.	**3p**
	$A^2 - 2A + 3I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 + 3I_2 = 2A$, $\det(A^2 + 3I_2) = 12$, $A^2 + I_2 = 2(A - I_2)$, $\sqrt{3\det(A^2 + 3I_2)} - \sqrt{2 \cdot \det(A^2 + I_2)} = \sqrt{3 \cdot 12} - \sqrt{2 \cdot 8} = 6 - 4 = 2.$	**4p**