Olimpiada naţională de matematică

Etapa locală, 29.02.2020

Clasa a X-a

BAREM DE CORECTARE

1.	***ENUNȚ.*** *Fie* $a,b,c \in (0,1)$ *si* $x,y,z \in (0,\infty)$ *astfel încât* $a=(bc)^x$, $b=(ca)^y$, $c=(ab)^z$. *Arătați că* $\frac{x(y+z-1)}{x+1}+\frac{y(z+x-1)}{y+1}+\frac{z(x+y-1)}{z+1}=0$.	
	Prof. Adrian Bud, Liceul Teoretic Negrești Oaș	
	$abc=(bc)^x(ca)^y(ab)^z=a^{y+z}b^{x+z}c^{x+y}$	**1p**
	$(y+z-1)\log_{abc} a+(x+z-1)\log_{abc} b+(x+y-1)\log_{abc} c=0$	**4p**
	$\frac{y+z-1}{1+\frac{1}{x}}+\frac{x+z-1}{1+\frac{1}{y}}+\frac{x+y-1}{1+\frac{1}{z}}=0$	**2p**
2.	***ENUNȚ.*** *Să se arate că a)* $2^n>\frac{n^2-n+2}{2}$, $\forall n\in N, n\geq 2$. *b)* $2^x>\frac{x^2-x+2}{2}$, $\forall x\in R, x\geq 2$.	
	Prof.dr. Ovidiu Pop, Colegiul Național „Mihai Eminescu” Satu Mare	
	$2^n=C_n^0+C_n^1+\ldots+c_n^n>C_n^0+C_n^2=\frac{n^2-n+2}{2}$	**4p**
	$2^x\geq 2^{[x]}=C_{[x]}^0+C_{[x]}^1+\ldots+C_{[x]}^{[x]}\geq C_{[x]}^0+C_{[x]}^1+C_{[x]}^2=1+[x]+\frac{[x]([x]-1)}{2}>1+(x-1)+$ $=\frac{(x-1)(x-2)}{2}=\frac{x^2-x+2}{2}$	**3p**
3.	***ENUNȚ.*** *Fie* $z_k=\cos\frac{(5k-4)\pi}{9}+i\sin\frac{(5k-4)\pi}{9}$, $k\in\{1,2,3\}$. *a) Arătaţi că* $z_1z_2z_3\in R$	

	b) Să rezolve în C ecuația $2z^3 = \frac{\lvert z\rvert + z_1}{1+z_1+z_1z_2} + \frac{\lvert z\rvert + z_2}{1+z_2+z_2z_3} + \frac{\lvert z\rvert + z_3}{1+z_3+z_3z_1}$.	
	Prof. Traian Tămâian, Liceul Teoretic Carei	
	a) $z_1z_2z_3 = \cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \in R$.	
	b) Dacă notăm $\lvert z\rvert = r,\ r \geq 0$, cum $z_1z_2z_3 = 1$, ecuaţia se scrie $2z^3 = \frac{r+z_1}{1+z_1+z_1z_2} + \frac{z_1(r+z_2)}{z_1(1+z_2+z_2z_3)} + \frac{z_1z_2(r+z_3)}{z_1z_2(1+z_3+z_3z_1)} \Leftrightarrow$ $2z^3 = \frac{r(1+z_1+z_1z_2)+1+z_1+z_1z_2}{1+z_1+z_1z_2} \Leftrightarrow 2z^3 = \frac{(r+1)(1+z_1+z_1z_2)}{1+z_1+z_1z_2} \Leftrightarrow 2z^3 = r+1 \Leftrightarrow$ $2z^3 = \lvert z\rvert + 1\ (*)$	
	Cum $\lvert z\rvert = r,\ r\geq 0$, trecând la modul din $(*)$ rezultă $2\lvert z\rvert^3 = \lvert z\rvert + 1 \Leftrightarrow 2r^3 = r+1 \Leftrightarrow$ $(r^3 - r) + (r^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow r(r-1)(r+1) + (r^3-1) = 0 \Leftrightarrow (r-1)[r(r+1) + (r^2+r+1)] = 0,$	
4.	***ENUNȚ.*** *Fie* z_A, z_B, z_C *afixele vîrfurilor unui triunghi A,B,C cu* $\lvert z_A\rvert = \lvert z_B\rvert = \lvert z_C\rvert$ *și D un punct de afix* $z_D = \frac{z_C + t\cdot z_B}{1-t}$, $t \in R - \{1\}$. *Dacă există un punct M de afix z astfel încât* $\lvert z_A - z\rvert = \lvert z_D - z\rvert = \lvert z_C - z\rvert = \lvert z_A + z_B + z_C - z\rvert$, *să se arate ca triunghiul ABD este isoscel.*	
	Prof.dr. Petru Braica, Colegiul Național „Mihai Eminescu” Satu Mare	
	Fie $A(z_A,)B(z_B), C(z_C)$, originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Ortocentrul triunghiului ABC are afixul $z_A + z_B + z_C$, notat cu H., Punctul D este situat pe semidreapta (BC, nu în interiorul segmentului (BC) iar condiția: $\lvert z_A - z\rvert = \lvert z_D - z\rvert = \lvert z_C - z\rvert = \lvert z_A + z_B + z_C - z\rvert$, este echivalentă cu MH congruent cu MC, congruent cu MD, congruent cu MA de unde AHCD inscriptibil.	**3p**
	Inscriptibilitatea patrulaterului AHCD conduce la <CAH congruent cu <HDC congruent cu <HBD . dreapta AH mediatoarea segmentului [BD] echivalent cu AB=AD .	**2p** **2p**