Olimpiada naţională de matematică

Etapa locală, 29.02.2020

Clasa a VII-a

BAREM DE CORECTARE

<table>
<tr><td rowspan="4">1.</td><td colspan="2">ENUNȚ. a) Arătați că numărul
$A = \sqrt{1}+\sqrt{1+3+5}+\sqrt{1+3+5+7+9}+\sqrt{1+3+5+7+9+11+13}$
este natural, pătrat perfect.
b) Arătați că numărul
$B = \sqrt{1}+\sqrt{1+3}+\sqrt{1+3+5}+\sqrt{1+3+5+7}+\cdots+\sqrt{1+3+\cdots+2021}$
este natural, dar nu este pătrat perfect.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prof. Ionela Turturean, Școala Gimnazială Culciu Mare</td></tr>
<tr><td>a) A = 1 + 3 + 5 + 7

= 16 = 4^2</td><td>1

1</td></tr>
<tr><td>b) $\sqrt{1+3+\cdots+(2k-1)} = k$, pentru orice k număr natural nenul

B = 1 + 2 + 3 + ... + 1011 = 1011·1012:2 = 511566

B nu este pătrat perfect (B este divizibil cu 2, dar nu este divizibil cu 4).</td><td>2

2

1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2.</td><td colspan="2">ENUNȚ. a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $2xy - 7y = 5x + 3$.

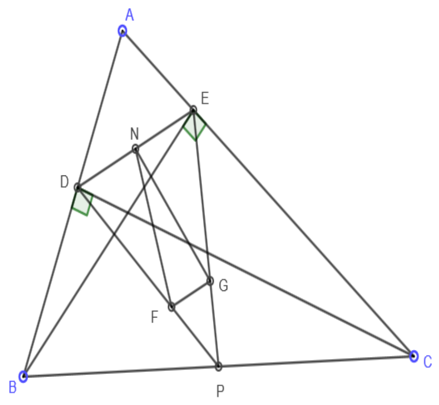
b) Fie b un număr natural și $a_n = 2n + b$, cu n număr natural. Să se arate că există o infinitate de valori ale lui n astfel încât:

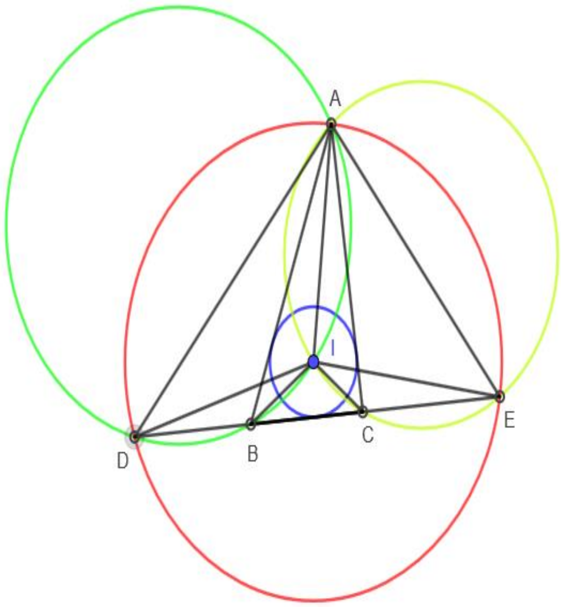
i) a_n este pătrat perfect;

ii) a_n nu este pătrat perfect.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gazeta Matematică, Prof. Ovidiu Pop, CNME</td></tr>
<tr><td>a) $(2x-7)(2y-5) = 41$

soluțiile sunt (4, 23), (3, -18), (-17, 2), (24, 3)</td><td>1

2</td></tr>
</table>

	b) Dacă b este număr par, atunci pentru $k \in N$, $k \geq b$, avem: pentru $n = 2k^2 + 1 - \frac{b}{2} \Longrightarrow a_n = 4k^2 + 2$, nu este pătrat perfect pentru $n = 2k^2 - \frac{b}{2} \Longrightarrow a_n = 4k^2$, este pătrat perfect Dacă b este număr impar, atunci pentru $k \in N^*$, $k \geq b$, avem: pentru $n = 2k^2 + 2k - \frac{b+1}{2} \Longrightarrow a_n = 4k(k+1) - 1$, nu este pătrat perfect pentru $n = 2k^2 + 2k - \frac{b-1}{2} \Longrightarrow a_n = (2k+1)^2$, este pătrat perfect	1 1 1 1
3.	***ENUNȚ.*** *Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, iar D și E picioarele înălțimilor acestuia duse din C respectiv B. Se notează cu F și G centrele de greutate ale triunghiurilor BCD respectiv BEC, iar cu P și N mijloacele segmentelor BC respectiv DE. Arătați că:* ***a)*** *triunghiul DEP este isoscel;* ***b)*** *triunghiul NFG este isoscel;* ***c)*** *GD ≡ FE.*	
	Prof. Adrian Bud, Liceul Teoretic Negrești Oaș	
	 **a)** DP ≡ PE sunt mediane corespunzătoare ipotenuzei	1 1
	b) $DF = \frac{2DP}{3}$, $GE = \frac{2EP}{3}$ $\Delta DNF \equiv \Delta ENG \Rightarrow NF \equiv NG$	1 2
	c) GD ≡ FE, sunt diagonale în trapez isoscel	2

4.	***ENUNȚ.*** *Se consideră triunghiul ABC oarecare cu centrul cercului înscris notat cu I. Cercul circumscris triunghiului ABI taie a doua oară dreapta BC în punctul D, iar cercul circumscris triunghiului ACI taie a doua oară dreapta BC în punctul E. Demonstrați că punctul I este centrul cercului circumscris triunghiului ADE. Formulați și demonstrați o reciprocă a afirmației de mai sus.*	
	Prof. Petru Braica, CNME	
		**1**
	AIBD – inscriptibil ⇒ $\sphericalangle IAB \equiv \sphericalangle IDB$ (1)	**1**
	AICE – inscriptibil ⇒ $\sphericalangle IAC \equiv \sphericalangle IEC$ (2)	**1**
	(1), (2) ⇒ $\sphericalangle IDE \equiv \sphericalangle IED$ ⇒ ΔIDE isoscel cu ID ≡ IE (3)	**1**
	AIBD – inscriptibil ⇒ $\sphericalangle IBC \equiv \sphericalangle IAD$ (4) și	
	$\sphericalangle ADI \equiv \sphericalangle ABI$ (5), dar $\sphericalangle IBC \equiv \sphericalangle IBA$ (6)	
	⇒ $\sphericalangle IAB \equiv \sphericalangle IDA$ ⇒ ΔIDA isoscel cu IA ≡ ID (7)	**2**
	Din (3) și (7) rezultă concluzia problemei	
	Reciproca: Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ADE. Cercurile circumscrise triunghiurilor AOE, AOD taie dreapta DE în punctele B și C. Demonstrați că punctul O este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.	**1**
	Demonstrația urmează aceeași cale.	