Olimpiada naţională de matematică

Etapa locală, 29.02.2020

Clasa a XII-a

BAREM DE CORECTARE

1.	***ENUNȚ.*** *Se consideră mulțimea de matrice pătratice* $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in Z, a+b=c+d\right\}$. *a) Arătați că* $(M,\cdot)$ *este monoid.* *b) Determinați* $U(M)$.	
	***	
	a. Axiomele monoidului.	**2p**
	b. $A^{-1}\in M$, deci det(A)=± 1	**2p**
	$(a+b)(a-c)=\pm 1$ și determinarea celor patru mulțimi.	**3p**
2.	***ENUNȚ.*** *Să se calculeze integralele:* *a)* $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\ln^{2019} x}{x^2+2020x+1}dx$ *b)* $J=\int_{2}^{3}\frac{\ln x}{x^2+6}dx.$	
	Prof. Traian Tămâian, Liceul Teoretic Carei	
	a) Făcând schimbarea de variabilă x = $\frac{1}{y}$, $dx=(-\frac{1}{y^2})dy$, integrala se scrie: $\text{I}=\int_{2}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^{2019}\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}+\frac{2020}{y}+1}(-\frac{1}{y^2})dy=-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\ln^{1019} y}{y^2+2020y+1}dy=-I$, sau 2I = 0, de unde I = 0.	**3p**
	b) Făcând schimbarea de variabilă $x=\frac{6}{t}, dx=-\frac{6}{t^2}dt,$ integrala se scrie $J=\int_{3}^{2}\frac{\ln\frac{6}{t}}{\frac{36}{t^2}+6}\cdot(-\frac{6}{t^2})dt=\int_{2}^{3}\frac{\ln 6-\ln t}{t^2+6}dt=\int_{2}^{3}\frac{\ln 6-\ln x}{x^2+6}dx=\ln 6\cdot\int_{2}^{3}\frac{1}{x^2+6}dx-J,$ de unde rezultă	**3p** **1p**

	$J=\frac{\ln 6}{2}\cdot\int_2^3\frac{1}{x^2+6}dx=\frac{\ln 6}{2\sqrt{6}}arctg\frac{x}{\sqrt{6}}\Big\vert_2^3=\frac{\ln 6}{2\sqrt{6}}(arctg\sqrt{\frac{3}{2}}-arctg\sqrt{\frac{2}{3}}).$	
3.	***ENUNȚ.*** *Calculați primitivele funcției* $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{ax^6-x^2(x+2)^4}}$ *pe intervalul* $\left(\frac{2}{\sqrt[4]{a}-1},\ \infty\right)$, $a>1$.	
	Prof.dr. Indrea Adrian, Liceul Tehnologic Tarna Mare	
	$\int\frac{x+2}{\sqrt{ax^6-x^2(x+2)^4}}dx=\int\frac{\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{a-\left(1+\frac{2}{x}\right)^4}}dx=$	**4p**
	$-\frac{1}{4}arcsin\frac{x+2}{x\sqrt{a}}+C$	**3p**
4.	***ENUNȚ.*** *Fie funcția* $f:I\to\mathbf{R}$, *I interval real. Să se determine funcția f și domeniul maxim de definiție al funcției f știind că* $\frac{1}{f}\in\int f(x)dx$ *și* $f(4)=-\frac{1}{2}$.	
	Prof.dr. Ovidiu Pop, prof.dr. Petru Braica, Colegiul Național „Mihai Eminescu" Satu Mare	
	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=f(x),\forall\, x\in I$	**1p**
	$\frac{1}{f^2(x)}=2x-4,\forall\, x\in I$	**2p**
	$f(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{2x-4}},\forall\, x>2$ Final: $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{2x-4}},\forall\, x>2$	**2p** **2p**