**Olimpiada naţională de matematică**

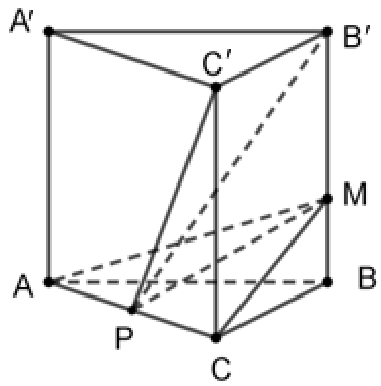
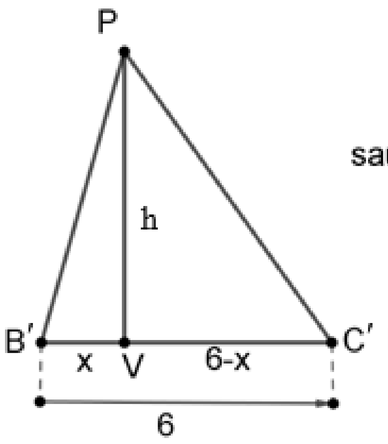
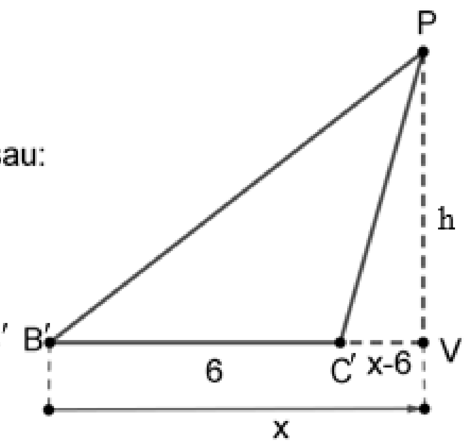
**etapa locală, 29.02.2020**

**Clasa a VIII-a**

**BAREM DE CORECTARE**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | ***ENUNȚ.*** *Arătaţi că triunghiul cu laturile de lungimi a, b, c, care verifică relaţiile* $\frac{2ab+c^2}{a+b-c}=\frac{2bc+a^2}{b+c-a}=\frac{2ca+b^2}{c+a-b}$ *este triunghi echilateral.* | |
| | *Prof. Bud Adrian, Liceul Teoretic Negreşti Oaş* | |
| | $\frac{2ab+c^2}{a+b-c}=\frac{2bc+a^2}{b+c-a}=\frac{2ca+b^2}{c+a-b}=\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}=a+b+c$ | **2p** |
| | $2ab + c^2 = ( a + b – c )(a + b + c )$<br>$2c^2 = a^2 + b^2$ (1) | **1p** |
| | $2bc + a^2 = ( b + c – a )(a + b + c )$<br>$2a^2 = b^2 + c^2$ (2) | **1p** |
| | Scăzând relaţiile (1) şi (2) obţinem $2c^2 – 2a^2 = a^2 – c^2 \Leftrightarrow a^2 = c^2 \Leftrightarrow a = c$ | **1p** |
| | Înlocuind în relaţia (2) obţinem a = b | **1p** |
| | Finalizare a = b = c, deci triunghiul este echilateral | **1p** |
| **2.** | ***ENUNȚ.*** *Fie numerele întregi distincte a şi b, astfel încât* $\lvert 3a-2b-6\rvert \le 1$ *şi* $\lvert a-2b+6\rvert \le 3$. *Arătaţi că numerele a şi b sunt consecutive.* | |
| | *Prof. Bud Adrian, Liceul Teoretic Negreşti Oaş* | |
| | $\lvert 3a-2b-6\rvert \le 1 \Rightarrow -1 \le 3a-2b-6 \le 1$ / +6 $\Rightarrow 5 \le 3a-2b \le 7$ (1) | **1p** |
| | $\lvert a-2b+6\rvert \le 3 \Rightarrow -3\le a-2b+6 \le 3$ / -6 $\Rightarrow -9 \le a-2b \le -3$ (2) | **1p** |
| | Adunăm relațiile (1) și (2): $-4 \le 4a-4b \le 4$ / :4 | **2p** |
| | $-1 \le a-b \le 1 \Rightarrow \lvert a-b\rvert \le 1 \Rightarrow (a-b) \in \{-1, 0, 1\}$. | **2p** |
| | Deoarece $a\neq b$ avem $(a-b)\in\{-1, 1\}$, deci a și b sunt consecutive. | **1p** |

| | | |
|---|---|---|
| **3.** | ***ENUNȚ.*** *Pe planul trapezului ABCD, AB ∥ CD, AB> CD, AD = CD =* $6\sqrt{2}$ *cm și AC = BC = 12 cm, se ridică perpendiculara MD astfel încât MD =* $6\sqrt{3}$ *cm.*<br>*a) Aflați distanța de la M la AB.*<br>*b) Determinați măsura unghiului dintre planele (MAC) și (ABC).* | |
| | *Prof. Boroș Adriana, Liceul Teologic Ortodox „Nicolae Steinhardt”* | |
| | a) Folosind Reciproca teoremei lui Pitagora observăm că Δ ADC este dreptunghic în D, deci trapezul ABCD este dreptunghic. | **1p** |
| | Dacă MD ⊥ (ABC), DA⊥ AB, DA și AB ⊂ (ABC), obținem din teorema celor trei perpendiculare că MA ⊥ AB. | **1p** |
| | Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MDA și obținem MA = $6\sqrt{5}$ cm. | **1p** |
| | **b)** (MAC) ∩ (ABC) = AC<br>Ducem DT ⊥ AC și obținem că MT ⊥ AC.<br>Deci ∢((MAC), (ABC)) = ∢ DTM. | **2p** |
| | $DT = \frac{AD \cdot DC}{AC} = 6$ cm | **1p** |
| | tg (∢ DTM )= $\sqrt{3}$, deci m(∢DTM) = 60° | **1p** |
| **4.** | ***ENUNȚ.*** *Fie prisma triunghiulară dreaptă ABCA′B′C′, cu ABC triunghi echilateral, AB = 6 cm, AA′= 9 cm, M ∈ (BB′), P ∈(AC) astfel încât PA=PC.*<br>*a) Determinați valoarea raportului* $\frac{MB}{BB'}$ *știind că aria triunghiului MCA este egală cu* $9\sqrt{7}cm^2$.<br>*b) Determinați cosinusul unghiului format de dreptele BC și B′P.* | |
| | *Prof. Turturean Ionela, Şcoala Gimnazială Culciu Mare* | |

| | | |
|---|---|---|
| |     sau:   a) $A_{MCA}=\frac{MP\cdot AC}{2}=9\sqrt{7}\Rightarrow$ PM= $3\sqrt{7}$ | 1p |
| | Teorema lui Pitagora în ΔMBP: $MP^2 = PB^2 + MB^2 \Rightarrow MB^2 = 36$, MB = 6 | 1p |
| | $\frac{MB}{BB'}=\frac{2}{3}$ | 1p |
| | b) BC ∥ B′C′$\Rightarrow cos\ \sphericalangle(BC, B'P)\ =\ cos\ \left(\widehat{C'B'P}\right)$ | 1p |
| | Teorema lui Pitagora în ΔB′BP, PB′ = $\sqrt{27+81}$ = $6\sqrt{3}$<br>Teorema lui Pitagora în ΔC′CP, PC′ = $\sqrt{9+81}$ = $3\sqrt{10}$ | 1p |
| | în ΔPB′C′, fie PV ⊥ B′C′, V∈B′C′, B′V = x, PV = h, VC′ = $\lvert 6-x \rvert$<br>Teorema lui Pitagora în ΔPVB′ și PVC′: | 1p |

| | | |
|---|---|---|
| | $x^2 + h^2 = 108$<br>$(6 - x)^2 + h^2 = 90$<br>$36 - 12x + 108 = 90 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$ | |
| | în $\Delta PB'V$, $\cos B' = \frac{B'V}{PB'} = \frac{9}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ | **1p** |