**Olimpiada naţională de matematică**

**Etapa locală, 29.02.2020**

**Clasa a IX-a**

**BAREM DE CORECTARE**

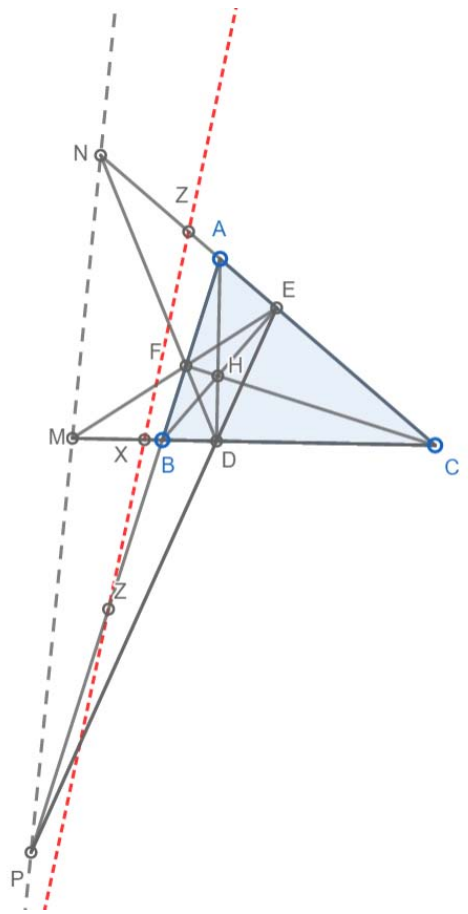
| | | |
|---|---|---|
| **1.** | ***ENUNȚ.*** *a) Fie* $x, y > 0$. *Arătați că* $x^3 - 3xy^2 + 2y^3 \geq 0$.<br>*b)Fie* $a, b > 0$. *Arătați că* $\frac{1}{(a+3b)^2} + \frac{1}{(3a+b)^2} \geq \frac{1}{2(a+b)^2}$. | |
| | *Prof. Adrian Bud, Liceul Teoretic Negrești Oaș* | |
| | a. $x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = (x-y)^2(x+2y) \geq 0$ | **3p** |
| | b. $\frac{2(a+b)^2}{(a+3b)^2} \geq \frac{a}{a+b}$ | **3p** |
| | Finalizare | **1p** |
| **2.** | ***ENUNȚ.*** *Fie şirurile* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, *definite prin* $a_n = \frac{n^2+n}{2(n^2+n+1)}$ *şi* $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-2a_k}$, $\forall n \in N^*$.<br>*a) Să se determine* $b_{100}$<br>*b) Să se calculeze* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}$ *şi să se aratecă* $S_n < \frac{3}{2}$, $\forall n \in N^*$. | |
| | *Prof. Traian Tămâian, LiceulTeoreticCarei* | |
| | a. $1-2a_n = 1 - \frac{n^2+n}{n^2+n+1} = \frac{1}{n^2+n+1}$.<br>$1-2a_k = \frac{1}{k^2+k+1} \Leftrightarrow k^2+k = \frac{2a_k}{1-2a_k}$<br>Rezultă că $\sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{1-2a_k} = \sum_{k=1}^{n} (k^2+k) = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$<br>$b_{100} = \frac{100 \cdot 101 \cdot 102}{6} = 100 \cdot 101 \cdot 17 = 171700.$ | **4p** |
| | $\frac{1}{b_k} = 3(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)})$, $\forall k \in N^*$. | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| | Atunci $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} = 3\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}) = 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}) < \frac{3}{2}, \quad \forall n \in N^*.$ | |
| **3.** | ***ENUNŢ.*** *Fie ABCDE un pentagon convex şi* $P \in (DE)$, $Q \in (CD)$ *astfel încât* $\frac{PE}{PD} = \frac{QC}{QD} = 2.$ *Dacă* $M, N$ *sunt respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, ABE, să se arate că* $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}.$ | |
| | *Prof. Traian Tămâian, LiceulTeoreticCarei* | |
| | Cum $M, N$ sunt respectiv centrele de greutate ale triunghiurilorABC, ABE, rezultă: <br> $3 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ <br> $3\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$ | **2p** |
| | Cum $\frac{PE}{PD} = \frac{QC}{QD} = 2,$ rezultă că $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{1+2}(\overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OD}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OD}$ <br> şi $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{1+2}(\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD}$ | **2p** |
| | $3 \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ <br> $3 \cdot (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ <br> Obţinem că $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$, de unde rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram şi atunci $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}.$ | **3p** |
| **4.** | ***ENUNȚ.*** *Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC, cu D, E, F proiecțiile vârfurilor A, B, C pe laturile opuse. Construim intersecțiile EF cu BC notat cu M, DF cu CE notat cu N și DE cu BA notat cu P.* <br> *a) Demonstrați coliniaritatea punctelor M, N și P.* <br> *b) Dacă X, Y și Z sunt mijloacele segmentelor DM, NE respective PF atunci arătați că există un număr real* ***a*** *astfel încât* $\overrightarrow{XY} = a\overrightarrow{YZ}$. | |
| | *Prof.dr. Petru Braica, prof.dr. Ovidiu Pop, Colegiul Național „Mihai Eminescu” Satu Mare* | |
| | Aplicăm teoremalui Menelaus de trei ori, pentru triunghiul ABC și transversal M-F-E, obținem MB/MCxCE/EAxAF/FB=1, pentru triughiul ABC ș i transversala P-D-E, PB/PAxAE/ECxCD/DB = 1 și tot pentru triunghiul ABC dar cu transversala N-F-D avem MB/MCxPB/PAxNC/NA = 1 și a cum înmulțind cele trei egalități obținem MB/MCxPB/PAxNC/NA = 1 relație care implică în baza reciprocei teoremei lui | **4p** |



Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
05www.satmar.rowww.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucureşti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32

| | | |
|---|---|---|
| | Menelaus aplicată pentru triunghiul ABC, coliniaritatea punctelor M, N și P. | |
| | b) Dacă unghiul B este > decât C atunci se obține că dreapta MN lasa triunghiul ABC la dreapta acesteia. Segmentele MD, PFși NE sunt  diagonal pentru patrulaterul complet PDFM (EN), deci în baza dreptei Newton-Gauss mijloacele acestor diagonal sunt coliniare, implică existența unui număr a real cu $\overrightarrow{XY} = a\overrightarrow{YZ}$. Celelalte cazuri se tratează analog.<br><br> | **3p** |