OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A IV-A

SUBIECTUL I

a) (3p) Calculați:
5x[326-16x(54:9)]+870 ;

b) (4p) Să se afle termenul necunoscut din egalitatea:
3+3x[3+3x(3+3x3)] = (3xa+3)x3+3.

SUBIECTUL II

Cinci prieteni Ioana, Diana, Daniel, Cornel și Cristina vor să cumpere o culegere de matematică. Fiecare copil participă cu o anumită sumă de bani astfel: Ioana și Diana cu 8 lei împreună, Ioana și Daniel cu 12 lei împreună, Ioana și Cornel cu 16 lei împreună, iar Ioana și Cristina cu 20 lei împreună.

Aflați cu ce sumă de bani participă Ioana, știind că ceilalți patru prieteni participă cu 44 lei în total.

SUBIECTUL III

Să se scrie toate numerele naturale impare de forma $\overline{abcd}$ cu toate cifrele distincte care au cifra zecilor 7 și suma cifrelor 11.

SUBIECTUL IV

Trei buchete de trandafiri și patru buchete de lalele costă 260 lei, iar cu jumătate din prețul unui buchet de trandafiri se poate cumpăra un singur buchet de lalele, rămânând un rest de 10 lei. Care este prețul unui buchet de trandafiri?

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare exercițiu este notat de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru efectiv 2 ore.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a IV a
Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- *Nu se acorda puncte din oficiu.*
- *Pentru orice solutie corecta, diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.*
- *Fiecare exercitiu este punctat de la 0 la 7.*

Subiectul I. a) Raspuns 2020..3 puncte

b) a=12... 4 puncte

Subiectul II. Fie x,y,z,t,u sumele de bani ale celor cinci prieteni...................1 punct

Obtinem relatiile:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=8\\ x+z&=12\\ x+t&=16\\ x+u&=20\\ y+z+t+u&=44 \end{aligned}\right\}$$ ....3 puncte

Deci 4x+44=56, de unde rezulta ca x=3 lei.. 3 puncte

Subiectul III. Cifra zecilor este c=7...1 punct

a+b+d=4, a,b,d cifre disticte si a diferit de 0.............................1 punct

Cum numarul este impar rezulta ca d poate fi 1 sau 3................ 2 puncte

Obtinem numerele 1073 si 3071.. 3 puncte

Subiectul IV.

Daca jumatate din pretul unui buchet de trandafiri inseamna pretul unui buchet de lalele plus inca 10 lei, atunci un buchet de trandafiri valoreaza cat doua buchete de lalele si inca 20 lei.

3 buchete de trandafiri......4 buchete de lalele.......260 lei .... 2 puncte

3 buchete de trandafiri = 6 buchete de lalele + 3 x 20 lei .... 2 puncte

Obtinem ca 10 buchete de lalele costa 200 lei, deci pretul unui buchet de lalele egal cu 20 lei ....2 puncte

Cum un buchet de trandafiri valoreaza cat doua buchete de lalele plus inca 20 lei, se poate obtine ca pretul buchetului de trandafiri este de 60 lei. .... 1 punct

Calea 13 Septembrie 209, Sector5, 050722, București
Tel: +40 (0) 21 317 36 50
Fax: +40 (0) 21 317 36 54
www.isjilfov.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A V-A

SUBIECTUL I

a) (3p) Demonstrați că numărul N = $\overline{ab4}$ + $\overline{aba}$ + $\overline{a1b}$ este multiplu de 7, oricare ar fi cifrele a și b.

b) (4p) Demonstrați că numarul a = 4^{n^2+n}+9^{n^2-n}-2:5, oricare ar fi n un număr natural.

SUBIECTUL II

a) (4p) Să se determine numărul $\overline{abc}$, știind că împărțit la $\overline{bc}$ dă câtul 8 și restul a.

b) (3p) Determinați suma resturilor împărțirilor numerelor 1,2,3,...,2020 la 7.

SUBIECTUL III

a) (4p) Comparați numerele:
a = 1+3+5+…+2019 și b= 2+4+6+...+2020.

b) (3p) Aflați ultima cifră a numărului $(a+6)^b$.

SUBIECTUL IV

a) (3p) Arătați că 2592 = $2^5 \cdot 3^4$;

b) (4p) Determinați numerele naturale x,y,z din egalitatea:
$4 \cdot 8^x + 8 \cdot 4^y + 2 \cdot 16^z = 2592.$

$(Gazeta\ matematică)$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare exercițiu este notat de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru efectiv 2 ore.

Calea 13 Septembrie 209, Sector5, 050722, București
Tel: +40 (0) 21 317 36 50
Fax: +40 (0) 21 317 36 54
www.isjilfov.ro

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a V a
Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluție corecta, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*

Subiectul I. a) N=100a+10b+4+100a+10b+a+100a+10+b..............................1 punct

= 301a+21b+14..1 punct

=7(43a+3b+2)⁝7...1 punct

b) $n^2+n=n(n+1)⋮2$, deci $U(4^{n^2+n}) = 6$ (1)................................1 punct

$n^2-n=n(n-1)⋮2$, deci $U(9^{n^2-n}) =1$ (2)................................1 punct

Din (1) și (2) rezultă U(a) = 5, deci a⁝5.................................2 puncte

Subiectul II. a) $\overline{abc} = \overline{bc} \cdot 8+a$, unde $0 \le a < \overline{bc}$.. 1 punct

Deci, $100a+10b+c=(10b+c)\cdot 8+a \Longrightarrow 99a=7\cdot(10b+c) \Longrightarrow 99a=7\cdot\overline{bc}$, cum $7\cdot\overline{bc}⋮7 \Longrightarrow a = 7 \Longrightarrow \overline{bc}=99 \Longrightarrow b=c=9$.................................... 2 puncte

$\Longrightarrow \overline{abc}=799$.. 1 punct

b) Resturile la împărțirea cu 7 sunt 0,1,2,3,4,5,6......................1 punct

Cum 2020=7·288+4, suma resturilor va fi

S = 0·288+1·289+2·289+3·289+4·289+5·288+6·288 = 6069..............2 puncte

Subiectul III. a) $a=1+3+5+...+2019=1010^2$...2 puncte

b=2+4=6+...+2020=1010·1011, deci a<b..........................2 puncte

b) U(a+6)=6.. 1 punct

Deci, $U((a+6)^b)=6$………………………………………...2 puncte

Subiectul IV. a) Se verifică prin calcul……………………………………… 3 puncte

b) $4 \cdot 2^{3x} + 8 \cdot 2^{2y} + 2 \cdot 2^{4z} = 2^5 \cdot 3^4 \Longrightarrow 2^{3x+2} + 2^{2y+3} + 2^{4z+1} = 2^5 \cdot 3^4 \Longrightarrow 2^5 \cdot (2^{3x-3} + 2^{2y-2} + 2^{4z-4}) = 2^5 \cdot 3^4$ ....2 puncte

Deci, $2^{3x-3} + 2^{2y-2} + 2^{4z-4} = 81$ (1)

Cum $2^0 + 2^4 + 2^6 = 81$ (2) .... 1 punct

Din (1) și (2)$\Longrightarrow 2^{3x-3} = 2^0 \Longrightarrow$ x=1

$2^{2y-2} = 2^6 \Longrightarrow$ y=4

$2^{4z-4} = 2^4 \Longrightarrow$ z=2 .... 1 punct

Calea 13 Septembrie 209, Sector5, 050722, București
Tel: +40 (0) 21 317 36 50
Fax: +40 (0) 21 317 36 54
www.isjilfov.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A VI-A

SUBIECTUL I

a) (4p) Arătați că numărul a = $3^{n+1} \cdot 2^n + 3^{n+2} \cdot 2^{n+1} - 16 \cdot 6^n$ este divizibil cu 5, oricare ar fi n ∈ ℕ.

b) (3p) Demonstrați că oricare ar fi 7 numere naturale există două a căror diferență este divizibilă cu 6.

SUBIECTUL II

a) (4p) Determinați numerele naturale x,y,z știind că sunt invers proporționale cu 2,3 și 9, iar $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{14}{37}$.

b) (3p) Dacă a, b^2 și c^4 sunt direct proporționale cu 4, 9 și 25, iar $a \cdot b \cdot c$=7500, aflați numerele naturale a,b și c.

SUBIECTUL III

Măsurile unghiurilor formate în jurul unui punct O sunt exprimate prin puteri ale numărului 5. Aflați numărul minim de unghiuri în condițiile date.

(*Gazeta Matematică*)

SUBIECTUL IV

Se dă un triunghi ABC isoscel cu AB=AC și [BI bisectoarea unghiului ABC, unde I∈(AC). Dacă diferența dintre unghiul de la bază și unghiul din vârf este de 36^0 și notăm BI=a cm și CI=b cm atunci:

a) (4p) Arătați că punctul I aparține mediatoarei segmentului [AB];

b) (3p) Calculați perimetrul triunghiului ABC în funcție de a și b.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare exercițiu este notat de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru efectiv 2 ore.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a VI a
Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluție corecta, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*

Subiectul I. a) a = $3^n \cdot 3 \cdot 2^n + 3^n \cdot 3^2 \cdot 2^n \cdot 2 - 16 \cdot 6^n$ ……………………..........………2 p

=6^n ·(3+18-16) = 6^n ·5 ⋮5, oricare ar fi n natural ………............………2 p

b) Dintre cele 7 numere naturale există două care dau același rest la împărțirea cu 6 .....1 p

$\Rightarrow \begin{cases} a = 6n + r \\ b = 6m + r \end{cases}$, unde r∈ {0,1,2,3,4,5} ⇒a-b = 6(n-m)⋮6...2 p

Subiectul II.

a) 2x=3y=9z=k ⇒x=$\frac{k}{2}$, y=$\frac{k}{3}$, z=$\frac{k}{9}$ ⇒ $\frac{2}{k} + \frac{3}{k} + \frac{9}{k} > \frac{14}{37} \Rightarrow \frac{14}{k} > \frac{14}{37}$ ⇒k<37 ....1p

Cum x,y,z∈ ℕ ⇒ $\begin{cases} k \vdots 2 \\ k \vdots 3 \\ k \vdots 9 \end{cases}$ ⇒ k⋮ [2,3,9] ⇒ k⋮18,k<37 și k nenul ⇒k∈ {18,36}................1 p

Pentru k = 18 ⇒x = 9, y = 6, z = 2...1 p

Pentru k = 36⇒x = 18, y = 12, z = 4...1 p

b) $\frac{a}{4} = \frac{b^2}{9} = \frac{c^4}{25} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 4k \\ b^2 = 9k \\ c^4 = 25k \end{cases}$, a,b,c numere naturale....................................1 p

Deci k=25p^4, unde p este număr natural, deci a=5p, b=15p^2,c=100p^4

Cum *abc* = 7500 rezultă p = 1 și deci *a* = 100, b = 15, c = 5...............................2 p

Subiectul III. Fie x numărul unghiurilor de 5^0, y numărul unghiurilor de 25^0 și z numărul unghiurilor de 125^0, obținem 5^0·x+25^0·y+125^0·z = 360^0...2 p

⇒x+5^0·(y+5^0·z)=72^0, de unde rezultă că x = 2..2 p

⇒5^0·(y+5^0·z)=70^0⇒y+5^0·z=14^0, de unde rezultă y = 4…………….........………………2 p

⇒5^0·z=10^0, de unde rezultă z = 2……………………………………………………………1 p

Subiectul IV. a) Se arată că m($\hat{B}$)= m($\hat{C}$) =72^0 șim($\hat{A}$) =36^0 ....1 p

Cum [BI bisectoarea $\widehat{ABC}$ ⇒m($\widehat{BAI}$) = m($\widehat{ABI}$) = 36^0 ....1 p

Deci ΔABI este isoscel, de unde rezultă că $[IA] \equiv [IB]$, deci I

aparține mediatoarei segmentului [AB]…………………………......................................…..2 p

b) AC=AB=AI+IC=BI+IC=(a+b) cm.……………………..............................1 p

m($\widehat{IBC}$) = m($\widehat{BIC}$) = 36^0⇒ ΔBIC este isoscel⇒IC = BC = b cm...1 p

P(ΔABC) = AB+AC+BC = (2a+3b)cm...1 p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A VII-A

SUBIECTUL I

a) (3p) Demonstraţi că pentru orice număr natural nenul $\boldsymbol{n}$, are loc egalitatea :

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \ .$$

b) (4p) Determinaţi [x] , unde :

$$x = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2020^2}$$ şi [x] = partea întreagă a lui x .

SUBIECTUL II

Să se rezolve în Z următoarea ecuaţie :

$$\left|\left|\left|\left|\left|\left|\left|x - 2^7 \cdot 2019\right| - 2^6 \cdot 2019\right| - 2^5 \cdot 2019\right| - 2^4 \cdot 2019\right| - 2^3 \cdot 2019\right| - 2^2 \cdot 2019\right| - 2 \cdot 2019\right| - 2019\right| = 2020.$$

SUBIECTUL III

Triunghiurile din plan ABC , BCD , BDE sunt dreptunghice în A , C şi D , isoscele şi niciunul nu este interior celuilalt. Perpendiculara din A pe BC întâlneşte pe DE în M .
Ştiind că CD = 5cm , să se calculeze AM.

supliment GM

SUBIECTUL IV

Se consideră un cerc de centru O și diametru $AB = 8$cm și punctul T, situat pe cerc, diferit de punctele A și B. Punctul C este intersecția tangentei la cerc în punctul T cu tangenta la cerc în punctul A și punctul D este intersecția tangentei la cerc în punctul T cu tangenta la cerc în punctul B. Lungimea segmentului AC este de 2cm . Se ştie că $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

a) (4p) Demonstrați că triunghiul ABD este dreptunghic isoscel.

b) (3p) Dreptele AT și OC se intersectează în punctul M și dreptele BT și OD se intersectează în punctul N. Demonstrați că aria patrulaterului $MONT$ este egală cu 6,4cm^2.

Model Evaluare Națională

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare exercițiu este notat de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru efectiv 3 ore.

Calea 13 Septembrie 209, Sector5, 050722, Bucureşti
Tel: +40 (0) 21 317 36 50
Fax: +40 (0) 21 317 36 54
www.isjilfov.ro

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a VII a
Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluţie corecta, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exerciţiu este punctat de la 0 la 7.*

Subiectul I. a) $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 3p

b) $x = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2020^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2019\cdot 2020}$ 1p

$x < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}$ 1p

$1 < x < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2020}$; $1 < x < 2$ 1p

[x] = 1 1p

Subiectul II.

$a_1 = \left|\left|\left|\left|\left|\left| x - 2^7\cdot 2019 \right| - 2^6\cdot 2019\right| - 2^5\cdot 2019\right| - 2^4\cdot 2019\right| - 2^3\cdot 2019\right| - 2^2\cdot 2019\right| - 2\cdot 2019\right|$

$|a_1 - 2019| = 2020$ 1p

$a_1 \in \{-1; 2020+2019\}$; $a_1 > 0$. Convine $a_1 = 2020+2019$.

$a_2 = \left|\left|\left|\left|\left| x - 2^7\cdot 2019 \right| - 2^6\cdot 2019\right| - 2^5\cdot 2019\right| - 2^4\cdot 2019\right| - 2^3\cdot 2019\right| - 2^2\cdot 2019\right|$

$|a_2 - 2\cdot 2019| = 2020 + 2019$.

$a_2 \in \{-1; 2020 + 3\cdot 2019\}$; $a_2 > 0$. Convine $a_2 = 2020+3\cdot 2019$. 2p

$a_7 = \left|x - 2^7\cdot 2019\right| = 2020 + (2^7 - 1)\cdot 2019$ 3p

$x \in \{-1; 2020+(2^8-1)\cdot 2019\}$ = mulţimea soluţiilor ecuaţiei. 1p

Subiectul III.

figura corespunzătoare problemei 1p
AS = 2,5cm 3p
AM = 10cm 3p

Subiectul IV.

figura corespunzătoare problemei 1p
triunghiul ABD este dreptunghic isoscel 3p
TM este înălţimea corespunzătoare ipotenuzei în ΔTOC ; TM $= \frac{4}{\sqrt{5}}$ cm 1p
OM $= \frac{8}{\sqrt{5}}$ cm 1p
Finalizare 1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A VIII-A

SUBIECTUL I

Fie expresia $E(x)=\left[1-\frac{2x-2}{x+3}+\frac{x^2-2x+1}{(x+3)^2}\right]^{-1}\cdot\left(1-\frac{x^2-3}{x}\right):\frac{x^2-x-3}{-x}$

a) (5p) Aduceți la forma cea mai simplă expresia E(x), pentru valorile reale ale lui x din domeniul de existență;
b) (2p) Determinați numerele întregi a, pentru care $E(a)$ este număr natural și are valoarea maximă 10.

SUBIECTUL II

a) (5p) Arătați că numărul : $\sqrt{2,25-3\sqrt{2\cdot\frac{13-2\sqrt{13}}{13}-\left(\frac{13-2\sqrt{13}}{13}\right)^2}+2\cdot\frac{13-2\sqrt{13}}{13}}$

se poate scrie sub forma $a+b\sqrt{13}$, cu a și b numere raționale. (G.M. S.E.10.272)

b) (2p) Pentru valorile a și b determinate la punctul a), arătați că $a^2-2ab+b^2>2\sqrt{a^2+b^2}$.

SUBIECTUL III

Pe planul triunghiului ABC cu unghiul drept în A, AB = $a\sqrt{3}$ și m($\measuredangle C$)=60°, se construiește perpendiculara MB , cu MB = a . Să se determine :

a) (4p) Distanța de la punctul C la dreapta MN, unde N este Mijlocul lui AB.
b) (3p) Tangenta unghiului format de dreapta CM cu planul (ABM);

SUBIECTUL IV

Fie ABCDA'B'C'D' un cub cu muchia de 6cm.
a) (4p) Arătați că dreapta de intersecție a planelor (AB'C') și (D'CB) este paralelă cu AD;
b) (3p) Calculați distanța dintre dreptele D'C și AC'.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a VIII a
Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluție corecta, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*

	Etapele rezolvării	**Punctaj**
Subiectul I.	a) Se pun condițiile de existență : x+3≠0, x≠0, x^2 –x-3≠0 și din expresia din paranteza dreaptă, adusă la forma $\left(\frac{x-1}{x+3}-1\right)^{-2}=\left(\frac{x+3}{-4}\right)^2$ nu se impune nicio condiție în plus. Rezultă $x\in$ **R**- $\left\{\frac{1}{2}\pm\sqrt{3};-3;0\right\}$ E(x)=$\frac{(x+3)^2}{16}$	**1p** **1p** **3p**
	b) E(a) $\in$**N** dacă și numai dacă $(a+3)^2$ se divide cu 16 și notând $\frac{(a+3)^2}{16}=k$, impunem condiția k≤10 Se obține a$\in${-15, -11, -7, 1, 5, 9}	**1p** **1p**
Subiectul II.	a) Efectuând calculele se ajunge la $\frac{\sqrt{13}-2}{2}$, de unde a=-1 și b=$\frac{1}{2}$	**3p** **2p**
	b)Se verifică inegalitatea, în care membrul stâng este 2,25 iar membrul drept $\sqrt{5}$	**2p**
Subiectul III.	a) Se dem. că CA$\perp$(MAB), construim AP$\perp$MN $\perp$și, din T3$\perp$ se deduce că d(C,MN)=CP Din asemănarea triunghiurilor APN și MBN se determină AP=$\frac{a\sqrt{21}}{7}$ și apoi se calculează CP din triunghiul CAP, cu	**1p** **2p** **1p**

	T. Pitagora, obținându-se CP=$\frac{a\sqrt{70}}{7}$	
	b) Cum CA $\perp$(ABM) rezultă că unghiul dintre CM și (ABM) este $\angle$ CMA. Din triunghiul CMA cu m($\angle$ A)=90˚, AC=a și AM=20 se determină tg($\angle$ CMA)=$\frac{1}{2}$	**1p** **2p**
Subiectul IV.	a) Din planul (AB'C') face parte dreapta DC', iar din planul (D'CB) face parte dreapta A'B. Notând intersecția diagonalelor feței ABB'A' cu E și intersecția diagonalelor feței DCC'D' cu F, deducem că dreapta de intersecție a planelor (AB'C') și (D'CB) este EF. Se dem. că ADFE este paralelogram, de unde EF $\parallel$ AD	**1p** **1p** **2p**
	b) Fie M mijlocul lui C'A. În triunghiul dreptunghic C'CA, CM este mediana corespunzatoare ipotenuzei, CM=$\frac{C'A}{2}$ apoi, analog, D'M=$\frac{C'A}{2}$, de unde se deduce CM=D'M Din MF mediana corespunzatoare bazei triunghiului isoscel D'MC rezultă MF$\perp$D'C . Se arată că D'C$\perp$(ADC') și, construind FG$\perp$C'A, cum FG este inclusă în (ADC'), rezultă D'C$\perp$FG, așadar FG este perpendiculară atât pe D'C , cât și pe AC'. FG=h în triunghiul dreptunghic MFC' , cu $\angle$ F drept, deci $FG=\frac{FM\cdot FC'}{C'M}=\sqrt{6}$ cm.	**1p** **1p** **1p**

Calea 13 Septembrie 209, Sector5, 050722, București
Tel: +40 (0) 21 317 36 50
Fax: +40 (0) 21 317 36 54
www.isjilfov.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A IX-A
Matematică-informatică

SUBIECTUL I

a) **(3 p)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Calculati S = $f(2) + f(2^2) + \ldots f(2^9)$.

b) **(4 p)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația :
$(2x + 1) + (2x + 5) + (2x + 9) + \ldots + (2x + 37) = 210$.

SUBIECTUL II

Folosind metoda inducției matematice demonstrați că :

$$\left(5^{2n+1}\cdot 2^{n+2} + 3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}\right) \vdots 19, (\forall) n \in N$$

SUBIECTUL III

Fie ABCD un dreptunghi cu laturile AB = 4 si AD = 3.

a) **(3 p)** Demonstrati ca pentru orice punct M din planul dreptunghiului are loc egalitatea $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

b) **(4 p)** Calculati modulul vectorului $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$

SUBIECTUL IV

Fie predicatele

p(x,y) : $|x|<1$ si $|y|<1;\ x,y\in IR$ si $q(x,y):\dfrac{x+y}{1+xy}\in(-1;1),\ x,y\in IR$ si $xy\neq -1$

a) **(1 p)** Aflati valoarea de adevar a propozitiei q(4,3)

b) **(3 p)** Demonstrati ca $p(x,y)\Rightarrow q(x,y)$

c) **(3 p)** Aflati valoarea de adevar a propozitiei : daca $x, y \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x+y}{1+xy}\in(-1,1)$, atunci $|x|<1, (y)<1$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a IX a - Matematică-informatică
Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluție corecta, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*

Subiectul I.

a) $S = 2+1+2^2+1+......+2^9+1 = (2 + 2^2 + ... + 2^9) + (1 + 1 + ... + 1) =$
$\frac{2(2^9-1)}{2-1} + 9 = 1031$ .... 3 p

b) Este o progresie aritmetica cu ratia 4 si cu 10 termeni ………………….2p

Subiectul II.

Etapa de verificare pentru n=0 $38 \vdots 19$ sau
n=1 $5^3 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 2^3 = 2^3(125+27) = 8 \cdot 152 = 8 \cdot 8 \cdot 19 \vdots 19$ ………………………...2p
Etapa de demonstratie ………………………………………..........................5p
$P(n) \Rightarrow P(n+1)$
$\left(5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}\right) = 19l,\ 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} = 19l - 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$
$5^{2(n+1)+1} \cdot 2^{(n+1)+2} + 3^{(n+1)+2} \cdot 2^{2(n+1)+1} = 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} \cdot 5^2 \cdot 2^1 + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \cdot 3 \cdot 2^2 =$
$\left(19l - 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}\right) \cdot 50 + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \cdot 12 = 19l \cdot 50 - 38 \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = 19\left(50 - 2 \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}\right)$

Subiectul III.

a) Din $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ obtinem $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$, de unde $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$........3p

b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ....……………………..……..1p

$2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}$...2 p

$\left|3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(3 \cdot 4)^2 + (4 \cdot 3)^2} = 12\sqrt{2}$ ………...……………..…1p

Subiectul IV.

a) Calcul direct $q(4,3) = \frac{7}{13}$ ....1 p

b) $Din\ |x| < 1, |y| < 1;\ avem\ -1 < x < 1; -1 < y < 1$ si $1 + xy > 0$;

$\frac{x+y}{1+xy} \in (-1;1);\ -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1;$

Avem de demonstrat ca $\frac{x+y}{1+xy} > -1\ si\ \frac{x+y}{1+xy} < 1$ .... 1 p

Cum $1+xy > 0$ avem $x + y > -1 - xy$, $x + y + 1 + xy > 0$,
$(x + 1)(1 + y) > 0$ adevarat deoarece $x > -1$, $y > -1$ ....1 p
$x + y < 1 + xy$, $x + y - 1 - xy < 0$,
$(x - 1)(1 - y) < 0$ adevarat deoarece $x < 1$, $y < 1$ .... 1 p

c) -1 < $\frac{x+y}{1+xy}<1$ avem $\frac{x+y}{1+xy}>-1$ si $\frac{x+y}{1+xy}<1$

$\frac{x+y}{1+xy}+1>0,\quad \frac{x+y+1+xy}{1+xy}>0, \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy}>0$

$\frac{x+y}{1+xy}-1<0, \frac{x+y-1-xy}{1+xy}<0,\quad \frac{(x-1)(1-y)}{1+xy}<0$

Daca 1 + xy > 0 atunci propozitia este adevarata... 1 p

Daca 1 + xy < 0 , atunci propozitia este falsa

(exemplu x = 2, y = -3 atunci $\frac{x+y}{1+xy}=\frac{2-3}{1-6}=\frac{1}{5}\in(-1,1)$) ....2 p

Calea 13 Septembrie 209, Sector5, 050722, Bucureşti
Tel: +40 (0) 21 317 36 50
Fax: +40 (0) 21 317 36 54
www.isjilfov.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A IX-A

SUBIECTUL I(7puncte)

(2p) a) Să se arate că $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\cdots+\frac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{\sqrt{56}}<1$

(2p) b) Demonstrați că $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}\right)\cdot(4+2\sqrt{3})\in N$

(3p)c)Se consideră numărul $x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$, $n\in N^*$. Să se determine n astfel încât $\{x_n\}=0{,}9$.

SUBIECTUL II (7puncte)

Demonstrați că $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{3}{4}-\frac{2n+1}{2n(n+1)}, \forall n\geq 2$ cu $n\in N$:

(3p) a) folosind egalitatea$\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right), \forall n\geq 2;$

(4p) b) prin inducție matematică.

SUBIECTUL III (7puncte)

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$având suma primilor n termeni $S_n=\frac{3n^2+7n}{2}, n\in N^*$.

(3p) a) Arătați că$a_n=3n+2$.

(2p) b) Arătați că $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică și aflați-i rația.

(2p)c) Aflați a_k+a_{n-k+1} .

SUBIECTUL IV (7puncte)

Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A și M mijlocul ipotenuzei [BC].

(2p) a) Construiți punctul E, astfel încât $\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}$ și punctul D, astfel încât $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AM}$.

(2p) b) Dacă $|\overrightarrow{BC}|$ = a, calculați $|\overrightarrow{CE}|$.

(3p) c) Arătați că $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{ME}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI
Clasa a IX a - - Faza locală 17.02.2020

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluție corecta, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*

Subiectul I.

a) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\cdots+\frac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{\sqrt{56}}=$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\cdots+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{56}}-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{56}}=$$ 1p

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{8}}=1-\frac{1}{\sqrt{8}}<1$$ 1p

b) $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}\right)\cdot(4+2\sqrt{3})=\frac{\sqrt{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}+1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}\cdot\left(4+2\sqrt{3}\right)=$

$$\frac{2}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}\left(4+2\sqrt{3}\right)=$$ 1p

$$\frac{2}{\sqrt{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}}\cdot 2\left(\sqrt{3}+2\right)=4\in N$$ 1p

c) $x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$ 1p

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

$$\frac{n}{n+1}=0{,}9=>n=9$$ 2p

Subiectul II.

a) Egalitatea se demonstrează prin calcul.

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}=$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$ 2p

$=\frac{3n^2-n-2}{4n(n+1)}=\frac{3}{4}-\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ 1p

b) Egalitatea se demonstrează prin inducție matematică.

Etapa de verificare 1p

Etapa demonstrației 3p

Subiectul III.

a) $a_n=S_n-S_{n-1}=3n+2$și 2p

$a_1=S_1=5$, deci $a_n=3n+2$ 1p

Calea 13 Septembrie 209, Sector5, 050722, București
Tel: +40 (0) 21 317 36 50
Fax: +40 (0) 21 317 36 54
www.isjilfov.ro

b) $a_{n+1} - a_n = r$ 1p

$r = 3$ 1p

c) $a_1 + a_n = 3n + 7$ 1p

$a_k + a_{n-k+1} = 3n + 7$ 1p

Subiectul IV.

a) E estesimetricullui B față de A, 1p
iar D estesimetricullui A față de M 1p

b) CA și EB sunt perpendiculare, EA=AB. 1p

Atunci $|\overrightarrow{CE}| = |\overrightarrow{CB}| = a$ 1p

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} =$ 2p
$= 2\overrightarrow{ME}$ 1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A X-A
Matematică-informatică

SUBIECTUL I(7puncte)

Fie $a = \left(\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}-1}\right)^{-1}$ și $b = \sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$

(2p) a) Să se aducă numărul a la o formă mai simplă.

(2p) b) Să se arate că b = $\sqrt{5} - 2$

(3p)c)Arătaţi că $a > b$.

SUBIECTUL II (7puncte)

(3p) a) Să se demonstreze egalitatea:

$$\frac{1}{\log_2 1 + \cdots + \log_2 2020} + \frac{1}{\log_3 1 + \cdots + \log_3 2020} + \cdots + \frac{1}{\log_{2020} 1 + \cdots + \log_{2020} 2020} = 1.$$

(4p) b) Să se calculeze$[\log_2 2020] + [\log_2 2024] + [\log_2 2028] + \cdots + [\log_2 2048]$, unde[a] reprezintă partea întreagă a numărului real a.

SUBIECTUL III (7puncte)

Fie numărul complex z = $\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

(2p) a) Arătațică numărul $\frac{Im(z)}{Re(z)}$ este subunitar.

(2p) b) Calculați $u(|z|^{2020})$, unde $u(a)$ reprezintă ultima cifră a numărului a.

(3p) c) Deduceți că $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \in R$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului complex z.

SUBIECTUL IV (7puncte)

(3p) a) Să se rezolve în R ecuația $\sqrt[3]{\sqrt{x} + 3} + \sqrt[3]{13 - \sqrt{x}} = 4$.

(4p) a) Să se rezolve în R ecuația $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x - 8} = 2$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a X a - Matematică-informatică
Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluție corecta, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*

Subiectul I.

a) $a=\left(\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}-1}\right)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{7}+1}=\frac{\sqrt{7}-1}{6}$ 2p

b) $b=\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}=\sqrt{17-4(2+\sqrt{5})}=$ 1p

$=\sqrt{9-4\sqrt{5}}=|2-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-2$ 1p

c) $a>b \Leftrightarrow \sqrt{7}+11>6\sqrt{5}$ 1p

$\Leftrightarrow 11\sqrt{7}>26 \Leftrightarrow 847>676$ 2p

Subiectul II.

a) $notăm\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots\cdot 2020=a$

$$\frac{1}{\log_2 1+\dots+\log_2 2020}+\frac{1}{\log_3 1+\dots+\log_3 2020}+\cdots+\frac{1}{\log_{2020} 1+\dots+\log_{2020} 2020}=$$

$$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_3 a}+\dots+\frac{1}{\log_{2020} a}=$$ 1p

$$=\log_a 2+\log_a 3+\dots+\log_a 2020=1$$ 2p

b) $1024=2^{10},\ 2048=2^{11}$

$1024<2020<2024<2028<\ldots<2044<2048$ 1p

$$[\log_2 2020]=[\log_2 2024]=\dots=[\log_2 2044]=10$$ 1p

$$[\log_2 2048]=11$$

$$[\log_2 2020]+[\log_2 2024]+[\log_2 2028]+\dots+[\log_2 2048]=$$ 1p

$$=7\cdot 10+11=81$$

1p

Subiectul III.

a) $\frac{Imz}{Rez}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$ 1p

$$\sqrt{2}-1<1$$ 1p

b) $|z|=2,\ |z|^{2020}=2^{2020}$ 1p

$$u(2^{2020})=6$$ 1p

c) $z\cdot\bar{z}=4$

$$z^2+\bar{z}^2=4\sqrt{2}$$ 1p

1p

$\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{\bar{z}}}{z}=\sqrt{2}\in R$ 1p

Subiectul IV.

2p

a) Ridicăm la cub și obținem $\sqrt[3]{(\sqrt{x}+3)(13-\sqrt{x})} = 4$

Ridicăm din nou la cub și obținem $x - 10\sqrt{x} + 25 = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(\sqrt{x}-5\right)^2 = 0 \;\; => x = 25$$ 1p

b) Condiția de existență a radicalului de ordin 2 este $x \geq 0$. 1p

Se notează $\sqrt{x} = y$ => $x = y^2$. Înlocuind pe x în ecuație se obține 1p

$y - \sqrt[3]{y^2 - 8} = 2$. Rezultă că $(y-2)^3 = y^2 - 8$ =>

$y^3 - 7y^2 + 12y = 0$ => $y(y^2 - 7y + 12) = 0$ 1p

Se obține $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 3$.

Revenind la notații se obțin soluțiile ecuației inițiale

$x_1 = 0$, $x_2 = 16$, $x_3 = 9$

1p

Calea 13 Septembrie 209, Sector5, 050722, București
Tel: +40 (0) 21 317 36 50
Fax: +40 (0) 21 317 36 54
www.isjilfov.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A X-A

SUBIECTUL I (7puncte)

Fie numerele iraționale : $a = 9 + 4\sqrt{5}$, $b = 9 - 4\sqrt{5}$. Arătați că:

(4p) a) ab și (a+b) sunt numere naturale.

(3p) b) (a-b), $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ sunt numere iraționale.

SUBIECTUL II (7puncte)

(3p) a) Să se calculeze: $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)\dots(1-i^{2020})$, unde $i^2 = -1$.

(2p) b) Să se calculeze $1 + i + i^2 + \cdots + i^{2020}$.

(2p) c) Să se determine un număr complex z astfel încât $z + 3\bar{z} = 4 + 6i$.

SUBIECTUL III (7puncte)

Dacă $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ și n un număr natural nenul, arătați că:

$$\frac{1}{\log_a 5 \log_a 25} + \frac{1}{\log_a 25 \log_a 125} + \cdots + \frac{1}{\log_a 5^n \log_a 5^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{log_{a}^{2}5}.$$

SUBIECTUL IV (7puncte)

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

(4p) a) $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}} + \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \frac{13}{6}$

(3p) b) $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 1$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI
Clasa a X a -- Faza locală 17.02.2020

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluție corecta, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*

Subiectul I.

a) $a \cdot b = 1 \epsilon N$ 2p
a + b = 18 2p
b) a – b = $8\sqrt{5}$ 1p

$\sqrt{a} = 2 + \sqrt{5}$ 1p

$\sqrt{b} = \sqrt{5} - 2$ 1p.

Subiectul I.

a) calcul direct 3p

b) calcul , rezultatul fiind 1 2p

c)z = a + bi, unde a = 1 și b = -3 2p

Subiectul III.

$$.\frac{1}{\log_a 5 \cdot \log_a 5^2} + \frac{1}{\log_a 5^2 \cdot \log_a 5^3} + \cdots + \frac{1}{\log_a 5^n \cdot \log_a 5^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2 \log_a 5 \cdot \log_a 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)\log_a 5 \log_a 5} =$$

$$\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right) \cdot \frac{1}{\log_a 5 \log_a 5} =$$

$$\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots . + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \cdot \frac{1}{\log_a 5 \cdot \log_a 5} =$$

$\left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{\log_a 5 \log_a 5}$. 7p.

Subiectul IV.

. a) C.E. $\frac{x-2}{x+3} \geq 0, \frac{x+3}{x-2} \geq 0 \to x \epsilon (-\infty, -3) \cup (2, +\infty) = D$ 1p

Not. $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}} = t$, ecuația devine $t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6}$ cu soluțiile $t_1 = \frac{2}{3}, t_2 = \frac{3}{2}$ 2p

Pentru $t_1 = \frac{2}{3} \to x_1 = 6$ și$t_2 = \frac{3}{2} \to x_2 = -7$ 1p.

b) not.$\left(2 + \sqrt{3}\right)^x = t \to t + \frac{1}{t} = 14 \to t^2 - 14t + 1 = 0$ 2p

după înlocuire se obține $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. 1p.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A XI-A
Matematică-informatică

SUBIECTUL I **(7puncte)**

Fie matricea.$A(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\a&3&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R}),a\in\mathbb{R}$

4p a) Determinati numarul real a pentru care avem egalitatea ${}^t\left(A^2\right)=\begin{pmatrix}1&2&4043\\0&1&6\\0&0&1\end{pmatrix}$,

unde am notat cu ${}^tX$ transpusa matricei X.

3p b) Calculati A^{2020}.

SUBIECTUL II **(7puncte)**

Se consideră numerelereale $a,b,c\in\mathbb{N}$ şi determinanţii: $\Delta_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$ şi

$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\f(a)&f(b)&f(c)\end{vmatrix}$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x^2+2x+3$.

3p a) Să se arate că $\Delta_1=(a-b)(b-c)(c-a)$.

2p b) Să se verifice dacă $\Delta_1=\Delta_2$.

2p c) Să se arate că aria triunghiului care are ca vârfuri 3 puncte distincte situate pe graficul funcţiei, având coordinate numere naturale, este numar natural.

SUBIECTUL III **(7puncte)**

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit de $a_n=\frac{1+2+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

4p a) Calculati $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3}\cdot a_n\right)^{n-1}$

3p b) Aflati $p\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{tg\left(p\cdot a_n\right)}{\ln\left(1+(1+p)\cdot a_n\right)}\right)=\frac{2020}{2021}$.

SUBIECTUL IV **(7 puncte)**

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{ax^2+bx+2020}}-x$, unde $a,b\in\mathbb{R}$. Determinați parametrii reali a si b astfel încât graficul funcției să admita ca asimptotă orizontala la $+\infty$ dreapta $y=1$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a XI a - Matematică-informatică
Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluție corecta, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*

SUBIECTUL I

a) $$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 2a+3 & 6 & 1\end{pmatrix}$$ ***2p***

$$^t\left(A^2\right)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4043\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=2020$$ ***2p***

b) $$A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ a & 3 & 1\end{pmatrix}=I_3+\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ a & 3 & 0\end{pmatrix}}_{B}$$ ***1p***

Calculul $B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$ si $B^3=O_3$ ***1p***

$$A^{2020}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2020 & 1 & 0\\ 3\cdot 1010\cdot 2019+2020a & 6060 & 1\end{pmatrix}$$ ***1p***

SUBIECTUL II

a) $$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}\overset{\substack{C_2-C_1\\ C_3-C_1}}{=}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-a\\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 1\\ b+a & c+a\end{vmatrix}$$ ***2p***

$$\Delta_1=(a-b)(b-c)(c-a)$$ ***1p***

b) $$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2+2a+3 & b^2+2b+3 & c^2+2c+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ 2a & 2b & 2c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix}=$$ ***1p***

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=\Delta_1$$ ***1p***

c) Fie $A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c)) \Leftrightarrow A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}a & f(a) & 1\\ b & f(b) & 1\\ c & f(c) & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$ ***1p***

$a, b, c \in \mathbb{N}$, deci cel putin 2 au aceeasi paritate $\Rightarrow$ diferenta lor este nr par => $A \in \mathbb{N}$ ***1p***

SUBIECTUL III

a) $a_n = \dfrac{1+2+...+n}{1^2+2^2+...+n^2} = \dfrac{3}{2n+1}$ ***1p***

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3}\cdot a_n\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{2n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{-1}}\right]^{\frac{-1}{2n+1}\cdot(n-1)} = e^{-\frac{1}{2}}$$ ***3p***

b) ***2p***

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{tg\left(p\cdot a_n\right)}{\ln\left(1+(1+p)\cdot a_n\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{tg\left(p\cdot a_n\right)}{p\cdot a_n}\cdot p\cdot a_n}{\dfrac{\ln\left(1+(1+p)\cdot a_n\right)}{(1+p)\cdot a_n}\cdot(1+p)\cdot a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{p\cdot a_n}{(1+p)\cdot a_n}\right) = \frac{p}{p+1} = \frac{2020}{2021}$$

$\Leftrightarrow p = 2020$.

SUBIECTUL IV

Trebuie ca $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ ***1p***

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{2020}{x^2}}}-1\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to\infty} x\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{2020}{x^2}}\right) =$$ ***1p***

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to\infty}\left[x\left(1-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{2020}{x^2}}\right)-4+\frac{3}{x}\right] = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[-4+\lim_{x\to\infty} x\left(1-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{2020}{x^2}}\right)\right]$$ ***1p***

Pentru ca $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow 1-\sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow a = 1$ ***1p***

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1}}\left(-4+\lim_{x\to\infty} x\left(1-\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{2020}{x^2}}\right)\right) = -4+\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-1-\frac{b}{x}-\frac{2020}{x^2}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{2020}{x^2}}} = -4+\frac{-b}{2} = 1$$ ***2p***

Finalizare $a = 1$ si $b = -10$ ***1p***

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A XI-A

SUBIECTUL I (7puncte)

Fie $M=\{A(x)\in M_2(\mathbb{R}) \mid A(x)=I_2+x\cdot B\}$ și $B=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -1 & -2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$

2p a) Calculați B^2.

2p a) Arătați că $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$ avem $A(x)\cdot A(y)=A(xy+x+y)$.

3p b) Calculați $\det\left(A^2(x)-(x+2)\cdot A(x)+(x+1)\cdot I_2\right)$.

SUBIECTUL II(7puncte)

Se consideră matricea.$A(a,b)=\begin{pmatrix}a & 4b & 1\\ a & 2a & b\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$

2p a) Arătați că $\det\left(A^2(a;b)\right)\geq 0$, pentru orice numere reale a și b.

5p b) Demonstrați că dacă numerele m,n sunt întregi și impare, atunci $\det\left(A(m,n)\right)\neq 0$.

SUBIECTUL III(7puncte)

Fie funcția $f:(0;\ \infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\log_2 x & ,\ 0<x\leq 1\\ ax+b & ,\ x\in(1;\ 2)\\ ax^2+bx+2 & ,\ x\geq 2\end{cases}$

4p a) Să se determine constantele reale *a și b* pentru care funcția are limită în punctele $x_0\in\{1;2\}$.

3p b) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(f(1010x)-\log_2(arctg\,2020x)\right)$.

SUBIECTUL IV(7puncte)

Se considera functia $f:(0;\ \infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\left(\sqrt{x^2+bx+c}-ax\right)$, unde $a,b\in\mathbb{R}_+$.
Determinați parametrii reali a și b astfel încât graficul funcției să admită ca asimptotă oblică la $+\infty$ dreapta $y=x+2020$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI
Clasa a XI a -- Faza locală 17.02.2020

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluție corecta, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*

SUBIECTUL I

c) Calculul $B^2 = B$. ***2p***

d) $A(x)\cdot A(y) = (I_2 + xB)(I_2 + yB) = I_2 + xB + yB + xyB^2$ ***1p***

$= I_2 + (x + y + xy)B = A(xy + x + y),\ (\forall)x, y \in \mathbb{R}$ ***1p***

e) $Tr(A(x)) = x + 2$ si $\det(A(x)) = x + 1$ ***1p***

Cum $A(x) \in M_2(\mathbb{R})$,din ecuatialui HAMILTON CAYLEY avem ***2p***

$A^2(x) - (x+2)\cdot A(x) + (x+1)\cdot I_2 = O_2$, deci

$\det\left(A^2(x) - (x+2)\cdot A(x) + (x+1)\cdot I_2\right) = \det(O_2) = 0$

SUBIECTUL II

d) $\det\left(A^2(a;b)\right) = \left(\det A(a;b)\right)^2 \geq 0, (\forall)a; b \in \mathbb{R}$ ***2p***

e) ***3p***

$$\det(A(m,n)) = \begin{vmatrix} m & 4n & 1 \\ m & 2m & n \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2\left(m^2 + 4n^2 - 5mn + m\right)$$

2p

$$\text{Daca } m \text{ si } n \text{ suntintregiimpare} \Rightarrow \begin{cases} m^2 \text{ este impar} \\ 4n^2 \text{ este par} \\ -5mn \text{ este impar} \\ m \text{ este impar} \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 4n^2 - 5mn + m \text{ este impar}$$

$\Leftrightarrow \det(A(m,n)) \neq 0$

SUBIECTUL III

c) Trebuie ca limitelelaterale in punctele $x_0 = \{2;4\}$ sa fie egale ***1p***

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \log_2 1 = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} ax + b = a + b \end{array}\right\} \Leftrightarrow a + b = 0$$ ***1p***

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} ax + b = 2a + b \\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} ax^2 + bx + 2 = 4a + 2b + 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 2a + b = 4a + 2b + 2$$ ***1p***

Finalizare $a = -2$ si $b = 2$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(f(1010x) - \log_2(arctg2020x)\right) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\log_2(1010x) - \log_2(arctg2020x)\right)$ ***1p***

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\log_2\left(\frac{1010x}{arctg\,2020x}\right)\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\log_2\left(\frac{1010x}{\frac{arctg\,2020x}{2020x}\cdot 2020x}\right)\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\log_2\left(\frac{1010x}{2020x}\right)\right)=\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=-1$$ ***2p***

SUBIECTUL IV

Trebuie ca $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ ***1p***

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+bx+c}-ax\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+bx+c}-ax=1$$ ***1p***

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+bx+c-a^2x^2}{\sqrt{x^2+bx+c}+ax}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-a^2\right)+bx+c}{\sqrt{x^2+bx+c}+ax}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x\left(1-a^2\right)+b+\frac{c}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+a\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-a^2\right)+b}{1+a}=1$$ ***1p***

Pentru ca $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1\Leftrightarrow 1-a^2=0\overset{a>0}{\Leftrightarrow}a=1\,\text{si}\,\frac{b}{2}=1\Leftrightarrow b=2$ ***1p***

Trebuie ca $\lim_{x\to\infty}f(x)-x=2020$ ***1p***

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x^2+2x+c}-\left(x^2+x\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+2x^3+cx^2-x^4-2x^3-x^2}{x\sqrt{x^2+2x+c}+\left(x^2+x\right)}\right)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2(c-1)}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{c}{x^2}}+1+\frac{1}{x}\right)}\right)=2020$$

Deci $c=4041$ ***2p***

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A XII-A
Matematică-informatică

SUBIECTUL 1(7puncte)

Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - i(x+y) - 1 + i$

și, pentru orice număr complex x se notează $x_n = \underbrace{x \circ x \circ \cdots \circ x}_{n \text{ de } x}, \forall n \geq 2, n \in N$.

(2p) a) Determinați numerele reale a și b pentru care $(3-i)\circ(3+i) = a+bi$.

(2p) b) Determinați elementul neutru al legii "$\circ$".

(3p) c) Calculați $(-1+i)^{2020}$.

SUBIECTUL 2(7puncte)

(7p) Să se arate că mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-4y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0, x^2 - 2y^2 = 1 \right\}$ formează o structură de grup în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL 3(7puncte)

Se consideră funcțiile $f: [0; \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \cos x + sinx$ și $g:(0; \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \ln x$.

(2p) a) Calculați $\int_0^{\pi} f(x)\text{dx}$

(2p) b) Calculați $\int_1^{e} \frac{g(x)}{\sqrt{x}}\text{dx}$.

(3p) c) Arătați că numărul A= $\int_{\pi}^{2\pi} f(x) \cdot g(x)\text{dx}$ este întreg.

SUBIECTUL 4(7puncte)

Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n = \int_n^{n+1} \frac{x}{1+x^2}\text{dx}$.

(2p) a) Arătați că $I_0 < \frac{1}{2}$.

(2p) b) Calculați $\lim_{n\to\infty} I_n$.

(3p) c) Calculați $\lim_{n\to\infty} n \cdot I_n$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a XII a - Matematică-informatică
Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluție corecta, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*

SUBIECTUL 1

Obs $x \circ y = (x-i)(y-i)+i\ ,\forall x,y \in \mathbb{C}$

a) $(3-i)\circ(3+i)=9-5i$ **1p**

$a=9, b=-5$ **1p**

b) $e=1+i\in\mathbb{C}$ **2p**

c) $x_n=\underbrace{x\circ x\circ\cdots\circ x}_{n\ de\ x}=(x-i)^n+i,\forall x\in\mathbb{C}$ inducție..**2p**

$(-1+i)_{2020}=(-1+i-i)^{2020}+i=1+i$ **1p**

SUBIECTUL 2

$A(x,y)=\begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-4y \end{pmatrix}=x\cdot I_2+y\cdot B$, unde $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$, $B^2=2I_2$,

$\det(A(x,y))=x^2-2y^2=1$

Parte stabilă

$A(x,y)\cdot A(a,b)=A(xa+2yb,xb+ya)$ **2p**

$\det(A(x,y)\cdot A(a,b))=\det(A(xa+2yb,xb+ya))=\det A(x,y)\cdot\det A(a,b)=1$ **1p**

$xa+2yb, xb+ya\in\mathbb{R}$, $xa+2yb\neq 0$..**1p**

Asociativitate, este cunoscută

Element neutru $I_2=A(1,0)\in M$ **1p**

Elemente simetrizabile $(A(x,y))^{-1}=A(x,-y)\in M$ **2p**

SUBIECTUL 3

a) $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi (x\cdot\sin x)'\mathrm{d}x=x\cdot\sin x\Big|_0^\pi=0$, sau integrare prin părți............................**2p**

b) $\int_1^e \frac{g(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_1^e\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\cdot\ln x\Big|_1^e-4\sqrt{x}\Big|_1^e=4-2\sqrt{e}$ **2p**

c) $A=\int_\pi^{2\pi} f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x=\int_\pi^{2\pi}(x\cdot\sin x)'\cdot\ln x\,\mathrm{d}x=x\cdot\sin x\cdot\ln x\Big|_\pi^{2\pi}-\int_\pi^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$ **2p**

$A=2\pi\cdot\sin(2\pi)\cdot\ln(2\pi)-\pi\cdot\sin(\pi)\cdot\ln(\pi)+\cos(2\pi)-\cos(\pi)=2\in\square$ **1p**

SUBIECTUL 4

a) $I_0=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\frac{\ln 2}{2}$ **1p**

$I_0<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\ln 2}{2}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\ln 2<\ln e\Leftrightarrow 2<e$ adevărat..**1p**

b) $I_n=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_n^{n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\right)$ **1p**

$\lim\limits_{n\to\infty} I_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\right)=\frac{1}{2}\ln 1=0$ **1p**

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot I_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}\ln\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\right)^{\frac{n}{2}}$ **1p**

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot I_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{2n+1}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n+1}}\right]^{\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{2n+1}{n^2+1}\right)}=\ln e=1$ **2p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A XII-A

SUBIECTUL 1 (7puncte)

1. Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & \frac{-x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru $x \in \mathbb{R}$ şi mulţimea

   $G = \{A_x | x \in \mathbb{R}\} \subset M_3(\mathbb{R})$

   a) **(3p)** Să demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

   b) **(4p)**Să se arate că $G = \{A_x | x \in \mathbb{R}\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

SUBIECTUL II (7puncte)

a) **(3p)** Să se rezolve în Z_4 ecuația $\hat{2}x^3 + \hat{3}x + \hat{1} = \hat{0}$

b) **(4p)** Să se rezolve în Z_5 sistemul $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{4}y = \hat{3} \\ \hat{2}x + y = \hat{2} \end{cases}$.

SUBIECTUL III (7puncte)

Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{(x)} = \begin{cases} x^2 + 1, x < 0 \\ xe^x + 1, x \geq 0 \end{cases}$

a) **(2p)** Arătaţi că f admite primitive pe $\mathbb{R}$

b) **(3p)** Calculaţi $\int_{-1}^{1} f_{(x)} dx$.

c) **(2p)** Să se demonstreze că, dacă funcția $F: (0.\infty) \to \mathbb{R}$, este o primitivă a funcției $g: (0.\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ și se stie că $\int_2^3 f_{(x)} dx = \int_3^4 f_{(x)} dx$, atunci numerele F (2), F (3), F (4) sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

SUBIECTUL IV (7puncte)

Se consideră funcţia $f: [-5,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

c) **(2p)** Să se arate că $\int_{-1}^{1} f^2(x) dx = \frac{148}{3}$

d) **(3p)** Să se demostreze egalitatea $\int_{-4}^{4} \frac{x}{f(x)} dx = 0$

e) **(2p)** Demonstrați că $0 \leq \int_0^a f(x) dx \leq 15, a \in [0,3]$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ ADOLF HAIMOVICI
Clasa a XI a -- Faza locală 17.02.2020

- *Nu se acordă puncte din oficiu.*
- *Pentru orice soluție corecta, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*
- *Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.*

SUBIECTUL I

(3p) a) Demonstrația relației

(4p) b) Demonstrația axiomelor grupului

SUBIECTUL II

(3p) a) Soluția x =3

(4p) b) Rezolvarea sistemului

SUBIECTUL III

(2p) a) f este continuă pe intervalele (-∞,0) și (0,∞), f cont. în x = 0 => f-cont. pe $\mathbb{R}$=> f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

(3p) b) $\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \frac{10}{3}$

(2p) c)Egalitatea din enunțdevine F(3) – F(2) = F(4) – F(3) etc.

SUBIECTUL IV

(2p) a) $f^2(x)$ este funcție pară și 2 $\int_0^1 (25 - x^2)dx = \frac{148}{3}$

(3p) b) $g(x) = \frac{x}{f(x)}$impară =>I = 0

(2p) c) $f'(x) \leq 0, x > 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 5 \Rightarrow 0 \leq \int_0^a f(x)dx \leq 15, a \in [0,3]$

Calea 13 Septembrie 209, Sector5, 050722, București
Tel: +40 (0) 21 317 36 50
Fax: +40 (0) 21 317 36 54
www.isjilfov.ro