Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397)
Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală

17 februarie 2019

Clasa a IX-a

1. a) Să se afle triunghiurile dreptunghice care au lungimile laturilor numere întregi în progresie aritmetică.

b) Determinați tripletele de numere naturale în progresie aritmetică strict crescătoare, prime între ele două câte două, știind că produsul lor divide suma cuburilor lor.

2. Fie $x, y, z > 0$, astfel încât $x + y + z = 1$. Arătați că:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}} + \frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}} + \frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}} \in [2,\ 3\,).$$

3. Să se determine $a, b \in \mathbb{N}$, astfel încât numărul $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ să fie rațional.

4. Se consideră triunghiul ABC, M este mijlocul lui (AC), $N \in (BM)$, astfel încât $\overrightarrow{BM} = 4\overrightarrow{BN}$ şi $P \in (BC)$, astfel încât $\overrightarrow{PC} = -6\overrightarrow{PB}$.

a) Demonstraţi că punctele A, N, P sunt coliniare.

b) Dacă $Q \in (AB)$, astfel încât $PQ \parallel AC$, demonstraţi că dreptele AP, BM şi CQ sunt concurente.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluţii şi bareme orientative
Clasa a IX-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Dacă lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic sunt în progresie aritmetică, atunci notându-le cu $b-r, b, b+r$ trebuie ca $(b-r)^2+b^2=(b+r)^2 \Rightarrow b=4r$, deci ele vor fi $3r, 4r, 5r, r \in \mathbb{N}$. **(2p)**

b) Fie $a<b<c$ cele trei numere. Atunci există $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a^3+b^3+c^3=kabc$. Înlocuind $b=\frac{a+c}{2}$ și împărțind cu $a+c$ obținem a^2-ac+c^2+ $+\frac{(a+c)^2}{8}=k\cdot\frac{ac}{2} \Leftrightarrow 9\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^2-2(2k+3)\cdot\frac{a}{c}+9=0$. Deoarece $\frac{a}{c}\in\mathbb{Q}_+^*$, trebuie ca discriminantul redus să fie pătrat perfect. Acesta fiind par, există $l \in \mathbb{N}$, astfel ca $\Delta' = (2k+3)^2-81=(2l)^2$, adică $(2k+3-2l)(2k+3+2l)=81$. **(2p)**

Avem de tratat trei cazuri:

Cazul I. $\begin{cases}2k+3-2l=1\\2k+3+2l=81\end{cases}$, conduce la $k=19$. Ecuația de gradul al II-lea se scrie: $9a^2-82ac+9c^2=0$. Cum $a<c \Longrightarrow c=9a, (a,c)=1 \Longrightarrow$ $\boldsymbol{a=1, c=9}$**, deci** $\boldsymbol{b=5}$**.** **(1p)**

Cazul II. $\begin{cases}2k+3-2l=3\\2k+3+2l=27\end{cases}$, conduce la $k=6$.
Analog, se găsește soluția $\boldsymbol{a=1, b=2, c=3}$**.**

Cazul III. $\begin{cases}2k+3-2l=9\\2k+3+2l=9\end{cases}$, conduce la $k=3$. Ecuația de gradul al II-lea se scrie: $9a^2-18ac+9c^2=0$, adică $a=c$, ceea ce nu convine. **(2p)**

2. Avem:
$$\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}}+\frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}}<\frac{1}{\sqrt{x+y+z}}+\frac{1}{\sqrt{x+y+z}}+\frac{1}{\sqrt{x+y+z}}=3\ (1)\ .$$ **(2p)**

Folosind inegalitatea mediilor, avem:
$$\sqrt{(x+2y+3z)\cdot 1}\ \le\ \frac{x+2y+3z+1}{2},$$
$$\sqrt{(2x+3y+z)\cdot 1}\ \le\ \frac{2x+3y+z+1}{2},$$
$$\sqrt{(3x+y+2z)\cdot 1}\ \le\ \frac{3x+y+2z+1}{2}.$$
(2p)

Deci:
$$\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}}+\frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}}\ge 2\left(\frac{1}{x+2y+3z+1}+\frac{1}{2x+3y+z+1}+\frac{1}{3x+y+2z+1}\right)(*).$$ **(1p)**

Folosind: $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 3^2, \forall\, a,b,c>0\ (**)$, deducem
$$2\left(\frac{1}{x+2y+3z+1}+\frac{1}{2x+3y+z+1}+\frac{1}{3x+y+2z+1}\right)\ge$$
$$\ge 2\cdot\frac{9}{(x+2y+3z+1)+(2x+3y+z+1)+(3x+y+2z+1)}=$$
$$=2\cdot\frac{9}{6(x+y+z)+3}=\frac{18}{6+3}=2.$$

În concluzie: $\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}}+\frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}}\ge 2\ (2)$.

Din (1), (2) rezultă concluzia:
$$\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}}+\frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}}\in[2,\ 3\ ).$$ **(2p)**

3. Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}} = \frac{p}{q} \Longrightarrow q\sqrt{2} - p\sqrt{3} = p\sqrt{b} - q\sqrt{a}$. Prin ridicare la pătrat se obține: $2q^2 + 3p^2 - 2pq\sqrt{6} = bp^2 + aq^2 - 2pq\sqrt{ab}$. Cu notația $n = \frac{bp^2+aq^2-2q^2-3p^2}{2pq} \in \mathbb{Q}$, relația se rescrie: $\sqrt{ab} = n + \sqrt{6}$, (*). **(3p)**

Prin ridicare la pătrat se obține: $ab = n^2 + 2n\sqrt{6} + 6$.

Dacă $n \neq 0 \Longrightarrow \sqrt{6} = \frac{ab-n^2-6}{2n} \in \mathbb{Q}$, fals. Rezultă $n = 0$ și conform relației $(*)$ se obține: $ab = 6, a, b \in \mathbb{N}$. **(2p)**

Distingem cazurile:

i) $a = 1$ și $= 6 \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$;

ii) $a = 2$ și $= 3 \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \notin \mathbb{Q}$;

iii) $a = 3$ și $= 2 \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 1 \in \mathbb{Q}$;

iv) $a = 6$ și $= 1 \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

În concluzie $a = 3$ și $b = 2$. **(2p)**

4.a) $N \in (BM)\ \text{și}\ \overrightarrow{BM} = 4 \cdot \overrightarrow{BN} \Rightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BN} = 3 \cdot \overrightarrow{BN} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{NM}} = -\frac{1}{3}$. **(1p)**

Dacă arătăm că există $\lambda \in \mathbb{R}^*$, asfel încât $\overrightarrow{AN} = \lambda \cdot \overrightarrow{AP}$, atunci vectorii $\overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{AP}$ sunt coliniari , deci punctele A, N şi P sunt coliniare. **(1p)**

Deoarece $\frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{NM}} = k = -\frac{1}{3}$, atunci

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{1-k} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{k}{1-k} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{8} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

(1p)

Deoarece $\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} = -\frac{1}{6}$, avem $\overrightarrow{AP} = \frac{6}{7} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{7} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{8}{7} \cdot \left(\frac{6}{8} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{8} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \frac{8}{7} \cdot \overrightarrow{AN}$.

Deci există $\lambda = \frac{7}{8}$, astfel încât $\overrightarrow{AN} = \frac{7}{8} \cdot \overrightarrow{AP}$. **(1p)**

b) $PQ \parallel AC \Rightarrow \frac{\overrightarrow{QA}}{\overrightarrow{QB}} = \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PB}} = -6$, conform teoremei lui ***Thales**.* **(1p)**

Deoarece M este mijlocul lui (AC) , avem

$\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{AM}} = -1 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{AM}} \cdot \frac{\overrightarrow{QA}}{\overrightarrow{QB}} = -\frac{1}{6} \cdot (-1) \cdot (-6) = -1$. **(1p)**

Conform reciprocei teoremei lui ***Ceva***, dreptele AP, BM şi CQ sunt concurente. **(1p)**