**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**
**Etapa locală**
**17 februarie 2019**

## Clasa a VII-a

**1.** a) Determinaţi cifrele $a$ şi $b$ astfel încât:

$$\sqrt{\overline{b7b}} = \overline{ab}.$$

(Numerele sunt scrise în baza zece.)

b) Dacă $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$ şi $xy + yz + zx = 2019$, arătaţi că:

$$\sqrt{(x^2+2019)\cdot(y^2+2019)\cdot(z^2+2019)} \in \mathbb{Q}.$$

**2.** Determinați numerele întregi $x$ și $y$ pentru care $\big||x-3|+|y-2x|\big|$=3.

**3.** În dreptunghiul $ABCD$ se consideră punctele $E$ și $F$ mijloacele laturilor $AD$ și respectiv $BC$. Pe prelungirea laturii $CD$ se consideră punctul $T$ astfel încât $T \in (CD$. Notăm punctul de intersecție a dreptelor $TE$ și $AC$ cu $S$. Arătați că $FE$ este bisectoarea unghiului $SFT$.

**4.** Fie $M$ un punct interior triunghiului $\Delta ABC$ astfel încât $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACM$. Dacă $P$ și $Q$ sunt proiecțiile lui $M$ pe $AB$, respectiv $AC$ și $E$ este mijlocul segmentului $[BC]$, arătați că $[EP] \equiv [EQ]$.

**Notă:**

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*

- *Timp de lucru: 3 ore.*

## Soluţii şi bareme orientative
## Clasa a VII-a
**Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**1.** a) Ipoteza se scrie succesiv:

$\overline{b7b} = \left(\overline{ab}\right)^2 \Leftrightarrow 100b + 70 + b = 100a^2 + 20ab + b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10(10b + 7 - 10a^2 - 2ab) = b(b-1).$ **(1p)**

Ultima egalitate arată că $b(b-1)$ se divide cu $10$. Deoarece $b(b-1)$ este număr par, trebuie ca $b$ sau $(b-1)$ să se dividă cu $5$. Aşadar $b = 5$ sau $b = 6$. **(1p)**

Dacă $b = 5 \Rightarrow 2a^2 + 2a = 11$, imposibil, deoarece membrul stâng este un număr par.

Dacă $b = 6 \Rightarrow a(5a + 6) = 32$. Rezultă că $a$ este o putere a lui $2$ . Se verifică faptul că singura valoare care convine este $a = 2$.

Aşadar $a = 2, b = 6$. **(1p)**

b) $xy + yz + zx = 2019 \Rightarrow x^2 + 2019 = x^2 + xy + yz + zx = x(x+y) + z(x+y) =$
$= (x+y)(x+z)$. Analog $y^2 + 2019 = (y+x)(y+z)$, $z^2 + 2019 = (z+x)(z+y)$ **(2p)**

$\Rightarrow \sqrt{(x^2+2019)\cdot(y^2+2019)\cdot(z^2+2019)} =$

$= \sqrt{(x+y)(x+z)(y+x)(y+z)(z+x)(z+y)} = \sqrt{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2} =$

$= (x+y)(y+z)(z+x) \in \mathbb{Q}$. **(2p)**

**2.** Din $x, y \in Z \Rightarrow |x-3| \in \mathbb{N}$ şi $|y-2x| \in \mathbb{N} \Rightarrow |x-3| + |y-2x| \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \big||x-3| + |y-2x|\big| = |x-3| + |y-2x| \Rightarrow |x-3| + |y-2x| = 3$ **(3p)**

Cum $|x-3| \in \mathbb{N}$ şi $|y-2x| \in \mathbb{N} \Rightarrow$ avem cazurile:

I. $|x-3| = 3$ şi $|y-2x| = 0 \Rightarrow x = 6$ şi y = 12 sau x=0 şi y=0,

II. $|x-3| = 2$ şi $|y-2x| = 1 \Rightarrow x = 5$ şi $y = 11$ sau $y = 9$
sau $x = 1$ şi $y = 3$ sau $y = 1$,

III. $|x-3| = 1$ şi $|y-2x| = 2 \Rightarrow x = 4$ şi $y = 10$ sau $y = 6$
sau $x = 2$ şi $y = 6$ sau $y = 2$,

IV. $|x-3| = 0$ si $|y-2x| = 3 \Rightarrow x = 3$ şi y = 9 sau $y = 3$.

Deci:

$(x, y) \in$ {(6;12), (0;0). (5;11), (5;9), (1;3), (1;1),(4;10), (4;6) (2;6), (2;2), (3;9), (3;3)}. **(4p)**

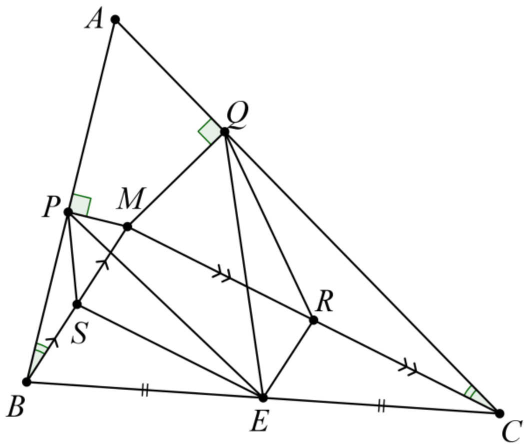
**3.** Fie $AC \cap BD = \{O\}$ şi $OP \perp EF$, $P \in SF$. Avem $\Delta EPF$ isoscel, de unde
$\measuredangle EFP \equiv \measuredangle FEP$ (1). **(2p)**

În $\Delta SCT, EO \parallel CT$, implică $\frac{SO}{OC} = \frac{SE}{ET}$ (2), iar în $\Delta SCF$ , $OP \parallel CF \Rightarrow \frac{SO}{OC} = \frac{SP}{PF}$ (3). **(2p)**

Din (2) și (3) $\Rightarrow \dfrac{SE}{ET} = \dfrac{SP}{PF}$ și din teorema reciprocă a teoremei lui Thales în $\Delta STF$ obținem $EP \parallel FT$. De aici $\measuredangle EFT \equiv \measuredangle FEP$ (4). **(2p)**

Din (1) și (4) rezultă $\measuredangle EFP \equiv \measuredangle EFT$, adică $FE$ este bisectoarea unghiului $SFT$. **(1p)**

**4.**




Luăm $S$ mijlocul lui $[BM]$ și $R$ mijlocul lui $[CM]$; $SERM$ este paralelogram. **(1p)**

$[SE] \equiv [MR] \equiv [QR]$. (1) **(1p)**

$[SP] \equiv [MS] \equiv [ER]$. (2) **(1p)**

$m(\sphericalangle PSE) = m(\sphericalangle PSM) + m(\sphericalangle ESM) = 2 \cdot m(\sphericalangle ABM) + m(\sphericalangle ESM)$. **(1p)**

$m(\sphericalangle ERQ) = m(\sphericalangle QRM) = m(\sphericalangle ERM) = 2 \cdot m(\sphericalangle ACM) + m(\sphericalangle ERM)$. **(1p)**

$\sphericalangle PSE \equiv \sphericalangle ERQ$. (3) **(1p)**

Din (1), (2) și (3) avem $\Delta PSE \equiv \Delta ERQ \Longrightarrow [EP] \equiv [EQ]$. **(1p)**