INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397)
Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
17 februarie 2019

Clasa a XI-a

1. a) Pentru adresa de e-mail , ȘTEFAN își alege password-ul schimbând între ele două câte două literele prenumelui, obținând combinația FANEST. Care este numărul de schimbări efectuate?

b) Să se rezolve în mulțimea permutărilor de gradul 5 ecuația: $\sigma x = x\sigma$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Găsiți toate soluțiile ecuației.

2. Demonstrați că sistemul $\begin{cases} A^3 + A^2B + AB^2 + ABA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B^3 + B^2A + BA^2 + BAB = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$,

nu are soluții în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

3. Fie şirul cu termenul general: $x_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + \sqrt{\frac{n+3}{n+2}} + \dots + \sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\right)$,

$n \in \mathbb{N}^*$ şi matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & x_n - 1 \\ x_n - 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

b) Dacă $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$.

4. Se consideră şirul $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot (2 - a_n)$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluţii și bareme orientative
Clasa a XI-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Numărul de schimbări efectuate sunt date de permutarea: $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} S\,T\,E\,F\,A\,N \\ F\,A\,N\,E\,S\,T \end{pmatrix}$ a mulțimii de litere $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{N}\}$. Schimbările efectuate sunt transpoziții ale mulțimii $\boldsymbol{M}$. Vom schimba literele mulțimii $\boldsymbol{M}$, în mod bijectiv, cu cifrele 1, 2, … , 6, astfel încât $\boldsymbol{\sigma}$ se scrie sub forma:

$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,5\,6\,3\,1\,2 \end{pmatrix}$. **(1p)**

$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\zeta_{56} \cdot \zeta_{45} \cdot \zeta_{34} \cdot \zeta_{26} \cdot \zeta_{15}}$ **(2p)**

b) Fie $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x(1) & x(2) & x(3) & x(4) & x(5) \end{pmatrix}$. Întrucât $\sigma x = x\sigma$ trebuie să avem $\sigma\big(x(k)\big) = x\big(\sigma(k)\big), \forall\, k = \overline{1,5}$. Astfel:

$$\sigma\big(x(1)\big) = x\big(\sigma(1)\big) = x(2),$$
$$\sigma\big(x(2)\big) = x\big(\sigma(2)\big) = x(3),$$
$$\sigma\big(x(3)\big) = x\big(\sigma(3)\big) = x(1),$$
$$\sigma\big(x(4)\big) = x\big(\sigma(4)\big) = x(5),$$
$$\sigma\big(x(5)\big) = x\big(\sigma(5)\big) = x(4).$$

(1p)

În concluzie soluțiile din S_5 ale ecuației $\sigma x = x\sigma$ sunt:

$$x_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$
$$x_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(3p)

2. Prima ecuație se scrie echivalent $A(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de unde $det(A+B) \neq 0$. **(3p)**

Pe de altă parte, adunând cele două ecuații obținem $(A+B)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde

$det(A+B) = 0$, contradicție cu relația obținută mai sus. **(4p)**

3. a) Avem:

$x_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{1}{n+k}}$, deci $1 \le x_n \le \sqrt{1+\dfrac{1}{n+1}}$, adică $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. **(2p)**

b) Prin inducţie matematică se demonstrează că:

$$a_n = \frac{\big(1+(x_n-1)\big)^n + \big(1-(x_n-1)\big)^n}{2} = \frac{(x_n)^n + (2-x_n)^n}{2},$$

$$b_n = \frac{\big(1+(x_n-1)\big)^n - \big(1-(x_n-1)\big)^n}{2} = \frac{(x_n)^n - (2-x_n)^n}{2},$$

$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n)^n$.

(3p)

Limita se scrie, astfel: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(x_n-1\right)}$, iar pe de altă parte,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(x_n-1\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n+k}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(n+k\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n+k}}+1\right)}.$$

Dar

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(n+k\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n+k}}\right)} \le \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2n+1}}+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

și $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \ln 2$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)^n = e^{\frac{ln2}{2}} = \sqrt{2}.$

În concluzie: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\right)^n = \sqrt{2}.$

(2p)

4. $\frac{1}{2}\cdot a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{2^{k+1}} = a_n - \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\cdot(1-2^{-n})$.

Aşadar $a_n = 2 - \frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{2^n}$, adică $a_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, $\forall$ n $\in$ $\mathbf{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. **(2p)**

$b_n = \frac{2^n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot(2-a_n) = \frac{2^n}{n}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot(2-a_n) = u_n\cdot v_n$, unde $u_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow{n} e$ şi **(2p)**

$v_n = \frac{2-a_n}{\frac{n}{2^n}} = \frac{x_n}{y_n}$, unde $x_n = 2 - a_n \to 0$ şi $y_n = \frac{n}{2^n} \to 0$. **(1p)**

Aplicăm lema Stolz (caz $\frac{0}{0}$): $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{\frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n-1} \xrightarrow{n} 1$. **(1p)**

Deci $v_n = \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow[n]{} 1$ şi $b_n = u_n \cdot v_n \xrightarrow{n} e$. **(1p)**