INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397)
Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

romania2019.eu
Președinția României la Consiliul Uniunii Europene

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
17 februarie 2019

Clasa a X-a

1. Determinați numerele complexe z cu proprietățile:
$|z| = 1$și $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$, apoi calculați suma valorilor găsite precum și aria poligonului convex având drept vârfuri imaginile lui z găsite.

2. Se consideră funcţia $f: [3, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = log_3^2 x - log_3 x$. Să se demonstreze că f este inversabilă şi să se determine toate numerele naturale n, pentru care $f^{-1}(n) \in \{3m | m \in \mathbb{N}^*\}$.

3. a) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale:
$$\log_{[x]} x + \log_{[x^2]} x + \log_{[x^3]} x + \log_{[x^4]} x - 2 = \frac{1}{12},$$
unde $[\alpha]$ reprezintă partea întreagă a numărului real α.

b) Fie $a, b, c \in (0,1)$, $0 < a \le b \le c < 1$. Comparaţi numerele:
$$A = \log_b a + \log_c b + \log_a c \quad \text{şi} \quad B = \log_a b + \log_b c + \log_c a.$$

4. Fie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ şi $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, astfel încât
$a^{x_1} + a^{x_2} + \dots + a^{x_n} \le a$ şi $a^{x_k} + a^{x_j} < 1, \forall\, k \ne j$.
Să se arate că: $(1 - a^{x_1})(1 - a^{x_2}) \dots (1 - a^{x_n}) \ge 1 - a$.

Notă:
- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluţii şi bareme orientative
Clasa a X-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. $z^2+z+1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2+z+1=\overline{z^2+z+1} \Leftrightarrow z^2+z+1=\bar{z}^2+\bar{z}+1 \overset{|z|=1}{\Longleftrightarrow}$ **(1p)**

$\overset{|z|=1}{\Longleftrightarrow} z^2+z+1=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1 \Leftrightarrow z^2+z+1=\frac{z^2+z+1}{z^2} \Leftrightarrow z^2+z+1=0$ sau $z^2=1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z \in \{\varepsilon, \varepsilon^2, 1, -1\}$. **(3p)**

$\varepsilon+\varepsilon^2+1+(-1)=-1.$ **(1p)**

Patrulaterul având vârfurile $A(\varepsilon), B(-1), C(\varepsilon^2), D(1)$ este ortodiagonal ($AC \perp BD$), deci aria acestuia este $\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2}=\sqrt{3}$. **(2p)**

2. $x \to log_3 x = g, x \in [3,\infty), Img=[1,\infty)$;
$x \to x^2-x=h, x\in[1,\infty), Imh=[0,\infty)$,
sunt funcţii bijective. Se deduce că $f:[3,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=(g^\circ h)(x)=log_3^2 x - log_3 x$ este bijectivă. **(4p)**

Se obţine $f^{-1}:[3,\infty)\to[0,\infty)$, $f^{-1}(x)=3^{\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}}$. **(1p)**

Din $f^{-1}(n)\in\{3m|m\in\mathbb{N}^*\}$ se deduce $n=p^2+p, p\in\mathbb{N}$. **(2p)**

3. a) Se impune condiţia: $x\in[2,\infty)$. Pentru $k=\overline{1,4}$ avem $[x^k]\le x^k \Longrightarrow 1\le \log_{[x^k]} x^k \Longrightarrow$ $\log_{[x^k]} x \ge \frac{1}{k}$ $(*)$. **(2p)**

Deci $\log_{[x]} x+\log_{[x^2]} x+\log_{[x^3]} x+\log_{[x^4]} x-2 \ge 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-2=\frac{1}{12}$. **(1p)**

Egalitate are loc în cazul: $\log_{[x^k]} x=\frac{1}{k}$, $(\forall)k=\overline{1,4}$, care au loc simultan $\Leftrightarrow x\in\mathbb{N}, x\ge 2$.

Deci ecuaţia admite soluţii de forma: $x=n, x\in\mathbb{N}, x\ge 2$. **(1p)**

b) Notăm $\alpha=\lg a, \beta=\lg b, \gamma=\lg c$ avem $\alpha\le\beta\le\gamma<0$ şi

$$A=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{şi} \quad B=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}$$ **(2p)**

atunci $$A-B=\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{\alpha\beta\gamma}\le 0 \quad \Rightarrow A\le B$$ **(1p)**

4. Notăm $a^{x_i}=a_i$, deci $a_i\in(0,1), i=\overline{1,n}$. **(1p)**

Arătăm prin inducţie că dacă $a_i\in(0,1)$, $i=\overline{1,n}, a_j+a_k<1, \forall j,k=\overline{1,n}, j\ne k$ şi $\sum_{i=1}^{n} a_i \le a$, atunci $\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)\ge 1-a$.

Pentru $n=1$, inegalitatea este evidentă. **(2p)**

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\in(0,1)$ cu $a_j+a_k<1, \forall j,k=\overline{1,n+1}, j\ne k$ şi $\sum_{i=1}^{n+1} a_i\le a$. Cum $\sum_{i=1}^{n} a_i \le a-a_{n+1}$, din ipoteza de inducție rezultă că $\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)\ge 1-a-a_{n+1}$.

Atunci:

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i)=(1-a_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)=\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)-a_{n+1}\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)\geq$$

$$\geq 1-a+a_{n+1}\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)\right)\geq 1-a,$$

deoarece

$a_{n+1}>0$ și $\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)<1$. **(4p)**