INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397)
Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: **isjdolj@isjdolj.ro** Web: **www.isjdolj.ro**

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
17 februarie 2019

Clasa a VIII-a

1. Să se rezolve în numere întregi, ecuația:

$$|x-3y+1|+|y-4x-3|+|x+y+2|+|2x+y+3|=3.$$

2. a) Să se determine cardinalul mulțimii:

$$A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,/\,\frac{\sqrt{26-4\sqrt{30}}+\sqrt{10+4\sqrt{6}}-\sqrt{84+32\sqrt{5}}}{3x+3}\in\mathbb{Z}\right\}.$$

b) Să se determine cel mai mare element al mulțimii:

$$M=\left\{\left[\sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{7+n+\left[\frac{2017}{n}\right]}}}\right]\middle|\, n\in\mathbb{N}, 1\le n\le 2017\right\}.$$

3. Demonstrați că, dacă în paralelipipedul dreptunghic $ALGEBRIC$ există inegalitatea:

$$\frac{AG^2}{\mathcal{S}[ALGE]}+\frac{LI^2}{\mathcal{S}[LGIR]}+\frac{CG^2}{\mathcal{S}[EGIC]}\le 6,$$

atunci paralelipipedul este cub. (Prin $\mathcal{S}[ALGE]$ s-a notat aria feței $ALGE$ și analoagele.)

4. Fie paralelipipedul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ și punctele $M\in(AD)$, $P\in(AB)$, $N\in(AA_1)$. Se consideră d dreapta de intersecție a planelor (MNP) și (DCC_1). Dacă $u=m[\sphericalangle(d,(ACC_1))]$, $v=m(\sphericalangle ACB)$, $t=m(\sphericalangle ANP)$ arătați că $\sin u=\cos v\cdot\sin t$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluţii şi bareme orientative
Clasa a VIII-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. Fie (x, y) o soluție. Atunci:
$3 = |x - 3y + 1|+|y - 4x - 3| + |x + y + 2| + |2x + y + 3| \geq$
$\geq x - 3y + 1 + y - 4x - 3 + x + y + 2 + 2x + y + 3 = 3.$ **(2p)**

Cum toate inegalitățile sunt egalități, rezultă că:
$x - 3y + 1 \geq 0,\ \ y - 4x - 3 \geq 0, x + y + 2 \geq 0, 2x + y + 3 \geq 0.$ **(1p)**

Din primele două inegalități rezultă că $4x + 3 \leq y \leq \frac{x+1}{3}$, deci $x \leq -\frac{8}{11}$. **(1p)**

Din prima și a treia inegalitate obținem: $x \geq 3y - 1 \geq 3(-x - 2) - 1$, deci $x \geq -\frac{7}{4}$. **(1p)**

Rezultă că
$x \in \left[-\frac{7}{4}, -\frac{8}{11}\right] \cap \mathbb{Z}$, deci $x = -1$. Inegalitățile anterioare devin: $y \leq 0$ și $y \geq -1$, deci $y \in \{-1, 0\}$. Soluțiile sunt: $(-1, -1)$ și $(-1, 0)$. **(2p)**

2. a) Observăm că **:** $\sqrt{26-4\sqrt{30}} = 2\sqrt{5}-\sqrt{6}$, $\sqrt{10+4\sqrt{6}} = \sqrt{6}+2$

$\sqrt{84+32\sqrt{5}} = 8+2\sqrt{5}$ **(1p)**

Obținem $\dfrac{\sqrt{26-4\sqrt{30}}+\sqrt{10+4\sqrt{6}}-\sqrt{84+32\sqrt{5}}}{3x+3} = \dfrac{-6}{3x+3}$. **(1p)**

$-6 / 3x+3 \Rightarrow x \in \left\{-3, -2, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right\} \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, 0, 1\} \Rightarrow$

card A=4. **(1p)**

b)Din $1 \leq n \leq 2017$ rezultă $n - 1 \geq 0$ și $n - 2017 \leq 0$, apoi $(n - 1) \cdot (n - 2017) \leq 0$, ceea ce este echivalent cu $n^2 - 2018n + 2017 \leq 0$, sau $n + \frac{2017}{n} \leq 2018$. **(2p)**

Trecând la partea întreagă obținem $n + \left[\frac{2017}{n}\right] \leq 2018$, cu egalitate pentru $n = 1$ și pentru $n = 2017$. Avem

$\sqrt{2 + \sqrt{4 + \sqrt{7 + n + \left[\frac{2017}{n}\right]}}} \leq \sqrt{2 + \sqrt{4 + \sqrt{7 + 2018}}} = 3$, deci $maxM = 3$. **(2p)**

3. Fie $BR = a, RI = b, IG = c$. Inegalitatea din enunțul problemei se scrie astfel:
$\frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{b^2+c^2}{bc} + \frac{c^2+a^2}{ca} \leq 6 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2}{2ca} \leq 3.$ (1) **(3p)**

Pe de altă parte, deoarece $\frac{x^2+y^2}{2xy} \geq 1, \forall\ x, y > 0$, avem:

$3 \leq \frac{a^2+b^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2}{2ca}$. (2) **(2p)**

Din (1), (2) rezultă:
$\frac{a^2+b^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2}{2ca} = 3$, ceea ce implică: $\frac{a^2+b^2}{2ab} = \frac{b^2+c^2}{2bc} = \frac{c^2+a^2}{2ca} = 1$, de unde $a = b = c$, adică paralelipipedul considerat este cub. **(2p)**

4. Deoarece $(ABB_1)//(DCC_1)$, dreapta $(MNP)\cap(DCC_1)=d$ este paralelă cu dreapta $(ABB_1)\cap(MNP)=NP$, deci d //NP. **(2p)**

Fie $PQ\perp AC, Q\in(AC)\Rightarrow AA_1\perp PQ$ și $AA_1\cap AC=\{A\}\Rightarrow PQ\perp(AA_1C)$, adică $u=m[\sphericalangle(d,(ACC_1)]=m(\sphericalangle PNQ)$ **(2p)**

Astfel, $\sin u=\dfrac{PQ}{NP}$, $\cos v=\cos\sphericalangle APQ=\dfrac{PQ}{AP}$, $\sin t=\dfrac{AP}{NP}$. **(2p)**

$\Rightarrow \cos v\cdot\sin t=\dfrac{PQ}{AP}\cdot\dfrac{AP}{NP}=\dfrac{PQ}{NP}=\sin u.$ **(1p)**