INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397)
Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

romania2019.eu
Președinția României la Consiliul Uniunii Europene

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
17 februarie 2019

Clasa a VI-a

1. Trei numere naturale, nenule, distincte îndeplinesc condițiile:
i) dublul primului număr adunat cu triplul celui de-al doilea și cu de patru ori al treilea număr este 99;
ii) triplul primului număr este egal cu dublul celui de-al doilea număr;
iii) de cinci ori al doilea număr dă cât triplul celui de-al treilea număr.
Aflați cele trei numere.

2. Să se determine numerele de forma $a = 2^x \cdot 3^y, x, y \in \mathbb{N}$, ştiind că numărul $30a$ are în mulţimea $\mathbb{N}$ cu 20 de divizori mai mulţi decât numărul divizorilor lui $6a$.

3. Se consideră două unghiuri adiacente $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ de măsuri 108^0, respectiv 68^0. Semidreptele $[OM$, $[ON$ şi $[OP$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC$, respectiv, $\sphericalangle MON$. Pe semidreapta opusă lui $[OP$ considerăm un punct Q, iar în interiorul unghiului $\sphericalangle AOQ$ alegem un punct D astfel încât $\sphericalangle DOQ = 10^0$. Să se arate că punctele B, O, D sunt coliniare.

4. Fie punctele $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ situate în această ordine pe o dreaptă d, astfel încât $A_0A_1 = 1\ cm, A_1A_2 = 2\ cm, A_2A_3 = 2^2\ cm, \ldots, A_{n-1}A_n = 2^{n-1}\ cm.$

a) Determinaţi numărul natural p, astfel încât $A_0A_p = 2047\ cm$.
b) Dacă M este mijlocul segmentului A_2A_{12} şi N este mijlocul segmentului A_4A_{10}, determinaţi măsura segmentului MN.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 2 ore.*

Soluţii și bareme orientative
Clasa a VI-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. Soluția I

Notăm cele trei numere cu $x, y,$ respectiv z. Din datele problemei deducem că:
$2x + 3y + 4z = 99$ (1);
$3x = 2y$ (2);
$5y = 3z$ (3). **(3p)**

Relațiile (2) și (3) se mai scriu $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ și $\frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ de unde se obține șirul de rapoarte: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$. Fie k valoarea comună a rapoartelor $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = k$, de unde
$\frac{x}{2} = k \Rightarrow x = 2k, \frac{y}{3} = k \Rightarrow y = 3k, \frac{z}{5} = k \Rightarrow z = 5k,$ **(2p)**
valori care înlocuite în relația (1) dau $2 \cdot 2k + 3 \cdot 3k + 4 \cdot 5k = 99 \Leftrightarrow 4k + 9k + 20k = 99 \Leftrightarrow 33k = 99 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k = 3$, de unde $x = 6, y = 9, z = 15$. **(2p)**

Soluția II

Putem să luăm și astfel:
din $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Leftrightarrow \frac{2x}{4} = \frac{3y}{9} = \frac{4z}{20} = \frac{2x+3y+4z}{4+9+20} = \frac{99}{33} = 3$ **(3p)**
$\Rightarrow \frac{2x}{4} = 3 \Rightarrow x = 6; \frac{3y}{9} = 3 \Rightarrow y = 9; \frac{4z}{20} = 3 \Rightarrow z = 15.$ **(4p)**

2. Deoarece $6a = 2^{x+1} \cdot 3^{y+1}$ şi $30a = 5 \cdot 2^{x+1} \cdot 3^{y+1}$, obţinem egalitatea **(1p)**
$20 + (x + 2) \cdot (y + 2) = 2(x + 2) \cdot (y + 2) \Leftrightarrow 20 = (x + 2) \cdot (y + 2)$. **(2p)**

Apar următoarele situaţii:
i) $x + 2 = 2$ şi $y + 2 = 10$;
ii) $x + 2 = 4$ şi $y + 2 = 5$;
iii) $x + 2 = 5$ şi $y + 2 = 4$;
iv) $x + 2 = 10$ şi $y + 2 = 2$.

Obţinem: i) $x = 0$ şi $y = 8$; ii) $x = 2$ şi $y = 3$; iii) $x = 3$ şi $y = 2$; iv) $x = 8$ şi $y = 0$.
În concluzie, numerele căutate sunt $2^0 \cdot 3^8$, $2^2 \cdot 3^3$, $2^3 \cdot 3^2$, $2^8 \cdot 3^0$. **(4p)**

3. Deoarece $[OM$ este bisectoarea unghiului AOB, avem că $m(\sphericalangle MOB) = 54^0$ şi pentru că $[ON$ este bisectoarea unghiului BOC, avem că $m(\sphericalangle NOB) = 34^0$ **(2p)**
$m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle NOB) + m(\sphericalangle MOB) = 88^0$ **(1p)**

Deoarece $[OP$ este bisectoarea unghiului MON, avem că $m(\sphericalangle MOP) = 44^0$ **(1p)**

$m(\sphericalangle POB) = m(\sphericalangle MOB) - m(\sphericalangle MOP) = 10^0$ **(1p)**
$\sphericalangle POB \equiv \sphericalangle QOD$ **(1p)**
Cum P, O, Q sunt coliniare, obţinem că B, O, D sunt coliniare. **(1p)**

4. a) Avem $A_0A_p = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{p-1}A_p = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{p-1} =$
$= 2^p - 1$. **(2p)**
Dacă $A_0A_p = 2047$, adică $2^p - 1 = 2047 \Rightarrow 2^p = 2^{11} \Rightarrow p = 11$. **(1p)**
b) Din punctul a) avem $A_0A_n = 2^n - 1, n \in \mathbb{N}$.

$A_2A_{12} = A_0A_{12} - A_0A_2 = (2^{12} - 2^2)\ cm$. Dacă M este mijlocul lui $[A_2A_{12}]$, atunci $A_2M = MA_{12} = 2^{11} - 2 = 2046\ cm$.

De aici $A_0M = A_0A_2 + A_2M = 3 + 2046 = 2049\ cm$. **(2p)**

Analog $A_4A_{10} = A_0A_{10} - A_0A_4 = (2^{10} - 2^4)\ cm$, de unde $A_4N = NA_{10} = 2^9 - 2^3 = 504\ cm$ şi atunci $A_0N = A_0A_4 + A_4N = 15 + 504 = 519\ cm \Rightarrow MN = A_0M - A_0N = 1530\ cm$. **(2p)**