Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397)
Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: **isjdolj@isjdolj.ro** Web: **www.isjdolj.ro**



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**
**Etapa locală**
**17 februarie 2019**

## Clasa a XII-a

**1.** Fie $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ fie funcţia $f_t : E \to E$,

$$f_t(x, y) = \left(x + ty + \frac{t^2}{2}, y + t\right), \forall (x, y) \in E.$$

Arătaţi că:

a) $f_u \circ f_v = f_{u+v}, \forall u, v \in \mathbb{R}; f_0 = \mathbf{1}_E; f_t^{-1} = f_{-t}$.

b) Mulţimea $G = \{f_t | t \in \mathbb{R}\}$ este grup în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor .

c) Grupurile $(G, \circ)$ şi $(\mathbb{R}, +)$ sunt izomorfe.

**2.** Fie $(G,\cdot)$ un grup abelian şi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Notăm $H_n = \{x \in G | x^n = 1\}$, $[m, n] = \text{cmmmc}\{m, n\}$ şi $H_m \cdot H_n = \{xy | x \in H_m; y \in H_n\}$. Să se arate că $H_m \cdot H_n = H_{[m,n]}$.

**3.** Fie $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $Q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii polinomiale de grad mai mare sau egal cu 2. Dacă $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

a) demonstraţi că: $\int e^x P(tgx)dx = e^x Q(tgx) + C$, unde grad$Q$= grad$P - 1$;

b) calculaţi: $\int e^x (2tg^3 x + 3tg^2 x + 4tgx + 2)dx$.

**4.** Să se calculeze: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{x}{1+\{\sin x\}} dx$.

**Notă:**

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

**Soluţii şi bareme orientative**
**Clasa a XII-a**
**Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**1.** a) Avem $f_u(x,y)\circ f_v(x,y) = f_u\left(x+vy+\frac{v^2}{2}, y+v\right)=$
$$=\left(x+vy+\frac{v^2}{2}+u(y+v)+\frac{u^2}{2}, y+u+v\right)=\left(x+y(u+v)+\frac{(u+v)^2}{2}, y+u+v\right)=$$
$= f_{u+v}$. **(2p)**
$f_0(x,y)=(x,y)$, **(1p)**
$f_t^{-1}(x,y)=\left(x+(-t)y+\frac{(-t)^2}{2}, y+(-t)\right)=f_{-t}(x,y),\ \forall (x,y)\in E.$ **(1p)**
b) Rezultă din punctul a). **(1p)**
c) Se defineşte $\varphi:\mathbb{R}\to G, \varphi(x)=f_x, x\in\mathbb{R}$ şi se arată că $\varphi$ este izomorfism. **(2p)**

**2.** Dacă $x\in H_m, y\in H_n \Rightarrow x^m=1, y^n=1 \Rightarrow (xy)^{[m,n]}=x^{[m,n]}\cdot y^{[m,n]}=1\Rightarrow$
$\Rightarrow xy\in H_{[m,n]}\Rightarrow H_m\cdot H_n\subseteq H_{[m,n]}$ (1). **(2p)**
Dacă $z\in H_{[m,n]}\Rightarrow z=z^{[m,n]+1}$ şi dacă $d=(m,n)$, atunci $m=da, n=db$, unde $a,b\in\mathbb{N}, (a,b)=1\Rightarrow \exists\, u,v\in\mathbb{Z}$ astfel încât $1=au+bv$,
$z=z^{[m,n]+1}=z^{dab+1}=z^{dab+au+bv}=z^{dab+au}\cdot z^{bv}=z^{au}\cdot z^{bv}$. **(2p)**
Alegem $x=z^{bv},\ y=z^{au}$ şi obţinem că $x^m=(z^{bv})^{da}=(z^{dab})^v=1, y^n=(z^{au})^{db}=(z^{dab})^u=1\Rightarrow$
$\Rightarrow x\in H_m, y\in H_n$ şi $z=xy$. Avem deci $H_{[m,n]}\subseteq H_m\cdot H_n$ (2). **(2p)**
Din (1), (2) rezultă $H_m\cdot H_n=H_{[m,n]}$. **(1p)**

**3.** a) Fie $Q(tgx)=a_k tg^k x+a_{k-1}tg^{k-1}x+\dots+a_1 tgx+a_0$. Atunci:
$$\left(e^x\cdot Q(tgx)\right)'=e^xQ(tgx)+e^xQ'(tgx)(1+tg^2x)=$$
$$=e^x\left(Q(tgx)+Q'(tgx)+tg^2x\cdot Q'(tgx)\right),$$ **(2p)**
$P(tgx)=Q'(tgx)+Q(tgx)+tg^2x\cdot Q'(tgx)$, grad$Q$= grad$P-1$. **(1p)**
b) Conform cu a), se caută o primitivă a funcţiei
$e^x(2tg^3x+3tg^2x+4tgx+2)$ de forma: $e^x(atg^2x+btgx+c)=F(x), F:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$,
$$F'(x)=e^x\left(atg^2x+btgx+c+2atgx\cdot(1+tg^2x)+b(1+tg^2x)\right)=$$
$$=e^x(2atg^3x+(a+b)tg^2x+(b+2a)tgx+c+b)=e^x(2tg^3x+3tg^2x+4tgx+2).$$
**(3p)**
Prin identificare, $a=1, b=2, c=0$. Rezultă că:
$\int e^x(2tg^3x+3tg^2x+4tgx+2)dx=e^x(tg^2x+2tgx)+\mathcal{C}$. **(1p)**

**4.** Deoarece $\sin x>0, \forall x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$, avem $f(x)=\frac{x}{1+\{\sin x\}}=\begin{cases}\frac{x}{1+\sin x}, & x\neq\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

Atunci $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{x}{1+\sin x}dx.$

**(1p)**

Cu schimbarea de variabilă $t=\pi-x$, $dt=-dx$, avem

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x)dx=-\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\pi-t}{1+\sin t}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\pi}{1+\sin t}dt-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(t)dt \Rightarrow$$

**(3p)**

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{1+\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}dx=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\left(tg\frac{x}{2}\right)'}{\left(1+tg\frac{x}{2}\right)^2}dx=-\frac{\pi}{1+tg\frac{x}{2}}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=-\frac{\pi}{3+\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3-\sqrt{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

**(3p)**