OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Faza locală-17.02.2018
Clasa a IX-a
Bareme

1) Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $a \geq b \geq c$ ……………………………3p
Relația din enunț revine la $2a - 2c = 2a$ ………………………………………………2p
Ceea ce este echivalent cu $c = 0 \Leftrightarrow abc = 0$ ……………………………………………...2p

2) Prin scăderea relațiilor $a_{n+1} = 2018a_n + 2017b_n - 1$, $b_{n+1} = 2017a_n + 2018b_n + 1$ obținem
$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - a_n + 2$
……………………………………………………………………………………...…2p
Rezultă că șirul notat $c_n = b_n - a_n$, $n \geq 1$ este progresie aritmetică de rație $r = 2, c_1 = -1$
..……………………………………………………………………………………...2p
Deci $c_n = c_1 + (n-1)r = 2n - 3$ ……………………………………………………….…2p
Prin urmare $b_{2017} - a_{2017} = c_{2017} = 4031$……………..1p

3) a)Fie R punctul pentru care $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{BN}$ …………………………………………….…2p

$\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CP}$ …………………………………………...……..1p
$\Rightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$ sunt laturile triunghiului
AMR……………………………………………………………………………….…1p
b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$ ……………………………………………...1p

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}\right) = \vec{0}$ ……………………………………….…….1p

Conform pct.a) rezultă că $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}$ sunt laturile triunghiului ACE……………….…...1p

4) Fie P și Q mijloacele segmentelor $[MN]$, respectiv $[BC] \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC}\right)$ ……..….3p

Fie D și E astfel încât $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MB}$, respectiv $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{NC} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right)$…………..….2p

Cum triunghiul DAE este isoscel și $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) \Rightarrow \overrightarrow{PQ}$ are direcția bisectoarei unghiului A ……………………………………………………………………….2p