OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17.02.2018

Clasa a VII-a

Soluţii și barem

1. Pentru $n=0$: $A=2^n+2018=2019$ nu e pătrat perfect $\Rightarrow \sqrt{A}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ **(1p)**

Pentru $n=1$: $A=2^n+2018=2020$ nu e pătrat perfect $\Rightarrow \sqrt{A}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ **(1p)**

Pentru $n\ge 2$: $A=2^n+2018=4k+2018=2(2k+1009)$ **(3p)**

$\Rightarrow 2\mid A$ și $4\nmid A$ $\Rightarrow A$ nu e pătrat perfect $\Rightarrow \sqrt{A}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ **(2p)**

2. $x^{2017}=y-z \Rightarrow x^{2018}=xy-xz$, $y^{2017}=z-x \Rightarrow y^{2018}=yz-xy$, $z^{2017}=x-y \Rightarrow z^{2018}=xz-yz$ **(3p)**

Adunând cele trei relații se obține $x^{2018}+y^{2018}+z^{2018}=0$ **(2p)**

Din $x^{2018}\ge 0, y^{2018}\ge 0, z^{2018}\ge 0 \Rightarrow x^{2018}=y^{2018}=z^{2018}=0$ **(1p)**

Atunci $x=y=z=0 \Rightarrow (x+y+z)^{2018}=0$ **(1p)**

3. În ΔAFD cu $m(F)=90°$, $[FM]$ mediană $\Rightarrow FM=\dfrac{AD}{2} \Rightarrow FM=MA=MD$ **(2p)**

Atunci ΔAFM este isoscel $\Rightarrow \sphericalangle FAM \equiv \sphericalangle AFM$ **(1p)**

$(AF$ bisectoare $\Rightarrow \sphericalangle FAM \equiv \sphericalangle FAN \Rightarrow \sphericalangle AFM \equiv \sphericalangle FAN$ (alterne interne) $\Rightarrow MF \parallel AC$ **(2p)**

Analog se obține $GN \parallel AB$ și atunci rezultă că $AMPN$ este paralelogram **(2p)**

4. Fie $AE\cap BC=\{M\}$ $\Rightarrow M$ mijloc $[BC]$ și $AM\perp BC$ **(1p)**

ΔABC isoscel și $m(\sphericalangle A)=40°$ $\Rightarrow m(\sphericalangle B)=m(\sphericalangle C)=70°$ **(1p)**

$(AE$ bisectoare $\Rightarrow m(\sphericalangle BAE)=m(\sphericalangle CAE)=20° \Rightarrow m(\sphericalangle AEB)=100° \Rightarrow m(\sphericalangle TEB)=80°$ **(1p)**

Fie $T'\in(AE$ astfel încât $m(\sphericalangle CBT')=70° \Rightarrow \Delta ABT'$ isoscel și M mijloc $[AT']$ **(1p)**

$m(\sphericalangle EBT')=m(\sphericalangle ABT')-m(\sphericalangle ABE)=140°-60°=80° \Rightarrow \Delta BET'$ isoscel **(1p)**

$\Rightarrow BT'=ET' \Rightarrow AB=ET' \Rightarrow ET=ET' \Rightarrow T=T'$ **(1p)**

Din M mijloc $[BC]$ și $[AT']$ și $[AB]\equiv[AC] \Rightarrow ABTC$ este romb **(1p)**