OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 17.02.2018
Clasa a VI-a
SOLUŢII ŞI BAREM

1. a) Aflaţi a 2018-a cifră din scrierea zecimală a numărului $A=\frac{7}{8}+\frac{8}{7}$.

b) Justificaţi că $\frac{2017}{4038}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2018^2}<\frac{2017}{2018}$.

Soluție

a) $A=\frac{^{7)}7}{8}+\frac{^{8)}8}{7}=\frac{113}{56}=2,017(857142)$ — 1p

$2018-4=2014;\ \ 2014:6=335\,rest\,4$ — 1p

A 2018-a cifră a lui A este 1. — 1p

b) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2018^2}>\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{2018\cdot2019}=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2019}=\frac{2017}{4038}$ — 2p

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2018^2}<\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{2017\cdot2018}=$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2018}=\frac{2017}{2018}$ — 2p

2. Determinaţi numerele naturale nenule $a,\ b,\ x,\ y$ astfel încât $(a,b)=2^{x+y}$ şi $a+b=12$.

(Am notat cu (a,b) cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b).

Gazeta matematică

Soluție

$(a,b)=2^{x+y}\Rightarrow a=2^{x+y}\cdot m$ şi $b=2^{x+y}\cdot n$, iar $(m,n)=1$. — 2p

$2^{x+y}\cdot m+2^{x+y}\cdot n=12\Leftrightarrow 2^{x+y}(m+n)=2^2\cdot3$ — 1p

$x+y=2\Rightarrow(x,y)\in\{(0,2);(1,1);(2,0)\}$; — 2p

$m+n=3\Rightarrow(m,n)\in\{(1,2);(2,1)\}\Rightarrow(a,b)\in\{(4,8);(8,4)\}$ — 2p

3. Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$, scrise în baza 10, ştiind că $11a-8b-4c=0$.

Soluţie

$11a=8b+4c \Leftrightarrow 11a=4(2b+c)$ 1p

$(4,11)=1 \Rightarrow 4\,|\,a \Rightarrow a\in\{4, 8\}$ 2p

$a=4 \Rightarrow 4(2b+c)=44 \Rightarrow 2b+c=11 \Rightarrow c$ este impar $\Rightarrow c\in\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 1p

Numerele sunt $451, 443, 435, 427, 419$ 1p

$a=8 \Rightarrow 4(2b+c)=88 \Rightarrow 2b+c=22 \Rightarrow c$ este par $\Rightarrow c\in\{0, 2, 4, 6, 8\}$ 1p

$c=0$ şi $c=2$ nu avem soluţii

Numerele sunt $894, 886, 878$ 1p

4. În jurul unui punct O sunt formate mai multe unghiuri dintre care cel puţin două au măsurile diferite. Ştiind că măsurile acestor unghiuri sunt exprimate în grade prin puteri nenule ale lui 8, aflaţi:

a) ce măsuri pot avea unghiurile formate în jurul lui O;

b) numărul minim și numărul maxim de unghiuri formate în jurul lui O.

Soluție

a) $8^3>360 \Rightarrow$ exponentul lui 8 poate fi maxim 2 $\Rightarrow$ unghiurile din jurul lui O pot avea câte 8° sau 64°. 2p

b) Dacă a este numărul unghiurilor de 8° și b este numărul unghiurilor de 64°, atunci $8a+64b=360 \Leftrightarrow a+8b=45$ 1p

$8b<45$, iar numărul unghiurilor este minim $\Rightarrow b$ este maxim $\Rightarrow$ $b=5$.

Atunci $a=5$. Numărul minim este 10. 2p

$8b<45$, iar numărul unghiurilor este maxim $\Rightarrow b$ este minim $\Rightarrow$ $b=1$.

Atunci $a=37$. Numărul maxim este 38. 2p

Subiecte propuse de: prof. Anca CUCU - Şcoala Gimnazială „Ion Basgan” Focșani

prof. Laurențiu ȚIBREA - Şcoala Gimnazială „Duiliu Zamfirescu” Focșani