OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 17.02.2018
Clasa a VIII-a
BAREM DE CORECTARE ŞI EVALUARE

1. Să se determine numerele reale x astfel încât $x - 5 \cdot \{x\} = 2018$.

Barem:

$[x] - 4 \cdot \{x\} = 2018$.. 1p

$4 \cdot \{x\}$ este număr întreg.. 2p

$0 \le 4 \cdot \{x\} < 4$, obținând $4 \cdot \{x\} \in \{0, 1, 2, 3\}$, de unde $\{x\} \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right\}$..........2p

$x \in \left\{2018, \frac{8077}{4}, \frac{8082}{4}, \frac{8087}{4}\right\}$ 2p

2. Fie $s = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$,

cu k număr natural nenul. Să se determine numărul k astfel încât $s \in (1000; 1001)$.

Barem:

$\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \sqrt{\frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}} = \frac{k^2+k+1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ 3p

$s = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} =$
$= k + 1 - \frac{1}{k+1}$ 2p

$\left[k + 1 - \frac{1}{k+1}\right] = k$ și cum $s \in (1000; 1001)$, rezultă k = 1000 ....2p

3. În piramida triunghiulară regulată VABC raportul dintre muchia bazei și muchia laterală este $\frac{6}{5}$. Determinați aria bazei,știind că distanța de la centrul bazei la o fata laterala este $\sqrt{39}$ cm.

Barem:

$\frac{AB}{VB} = \frac{6}{5} \Rightarrow AB = 6k, VB = 5k$ 1p

Fie M mijlocul muchiei [BC] $\Rightarrow$ OM apotema bazei $\Rightarrow OM = \frac{l\sqrt{3}}{6} = k\sqrt{3}$ 1p

$MB = \frac{l}{2} = 3k$. Din triunghiul VMB dreptunghic în M $\Rightarrow VM = 4k$ 1p

Din triunghiul VOM dreptunghic în O $\Rightarrow VO = k\sqrt{13}$ 1p

Construim $OT \perp VM$. Deoarece $BC \perp OM, BC \perp VM \Rightarrow BC \perp (VOM)$.

Dar $OT \subset (VOM) \Rightarrow BC \perp OT$.

$OT \perp VM, OT \perp BC \Rightarrow OT \perp (VBC) \Rightarrow d(O,(VBC)) = OT$ 1p

OT înălțime corspunzătoare ipotenuzei în triunghiul VOM dreptunghic în O $\Rightarrow$

$$\Rightarrow OT = \frac{VO \cdot OM}{VM} = \frac{k\sqrt{13} \cdot k\sqrt{3}}{4k} = \frac{k\sqrt{39}}{4}.$$

Deci $\frac{k\sqrt{39}}{4} = \sqrt{39} \Rightarrow k = 4 \Rightarrow$ AB = 6k = 24 cm 1p

$A_{\Delta ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{576\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}cm^2$ 1p

4. Se consideră cubul ABCDA'B'C'D' de latură AB = a, punctul M mijlocul muchiei [A'D'] și punctul N mijlocul muchiei [BB'].

a) Determinați sinusul unghiului dintre dreapta MN și planul (ABC).

b) Aflați distanța de la punctul M la dreapta NC'.

Barem:

a) $pr_{(ABC)}M = P, pr_{(ABC)}N = B \Rightarrow pr_{(ABC)}MN = PB$,unde P este mijlocul muchiei [AD].

Construim NS||PB, $S \in MP \Rightarrow m[\sphericalangle(MN,(ABC))] = m[\sphericalangle(MN, NS)] = m[\sphericalangle(MNS)]$ 1p

Deoarece $NB \perp (ABC), MP \perp (ABC) \Rightarrow MP \parallel NB \Rightarrow MNBP$ trapez dreptunghic

$\Rightarrow NB = SP = \frac{a}{2} \Rightarrow MS = \frac{a}{2}$ .Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ABP, dreptunghic

în A $\Rightarrow PB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ 1p

Aplicând teorema Pitagora în triunghiul MNS,dreptunghic în S

$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \sin\sphericalangle(MNS) = \frac{MS}{MN} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 1p

b) Fie R mijlocul muchiei [B'C'] $\Rightarrow MR \parallel A'B' \Rightarrow MR \perp (BCC')$ .Construim $RT \perp NC'$.

Din teorema celor trei perpendiculare, $MT \perp NC' \Rightarrow d(M, NC') = MT$ 1p

$\Delta C'TR \sim \Delta C'B'N (U.U.) \Rightarrow \frac{C'T}{C'B'} = \frac{C'R}{C'N} = \frac{TR}{B'N}$ 1p

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul B'C'N, cu unghiul B' drept $\Rightarrow C'N = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$\frac{TR}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow TR = \frac{a\sqrt{5}}{10}$ 1p

Din triunghiul MRT dreptunghic în R $\Rightarrow MT = \frac{a\sqrt{105}}{10}$ 1p

Propunători:
profesor Angela Dorneanu, Liceul Teoretic *Emil Botta* Adjud
profesor Fănel Lipan, Școala Gimnazială *Alexandru Vlahuță* Focșani