OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
27 IANUARIE 2018

CLASA a VII-a
BAREM

Subiectul 1.

a) Determină valorile reale ale lui x pentru care:

$$\frac{\sqrt{2^{2018}-2^{2017}-...-2^{802}}+5\cdot\sqrt{2+2+2^2+2^3+...+2^{799}}}{\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{16^{200}\cdot(x^2+3)}.$$

b) Determină cifrele a, b, c astfel încât numărul $\sqrt{\overline{233abc}}$ să fie număr natural.

Barem.

a) $2^{n+1}-2^n=2^n \Rightarrow 2^{2018}-2^{2017}-...-2^{802}=2^{802}$ **1p**

$2^n+2^n=2^{n+1} \Rightarrow 2+2+2^2+2^3+...+2^{799}=2^{800}$ **1p**

$\frac{2^{401}+5\cdot 2^{400}}{\sqrt{x^2+3}}=16^{100}\cdot\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow 7\cdot 2^{400}=2^{400}\cdot(x^2+3) \Leftrightarrow x^2+3=7 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x\in\{-2,2\}$ **2p**

b) $\sqrt{\overline{233abc}}\in\mathbb{N} \Rightarrow \overline{233abc}$ pătrat perfect **1p**

$233000<\overline{233abc}<233999 \Leftrightarrow 482^2<\overline{233abc}<484^2 \Rightarrow$ **1p**

$\overline{233abc}=483^2=233289$ şi concluzia **1p**

Subiectul 2.

a) Demonstrează că $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{2018^2}<1$.

b) Arată că oricare ar fi n, număr raţional pozitiv nenul, astfel încât:

$\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+...+\frac{2018}{n+2018}=2017$, atunci $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+2018}=\frac{1}{n}$.

Barem.

a) $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$, pentru orice număr natural n mai mare decât 1

Aplicând inegalitatea de mai sus pentru $n\in\{2,3,...,2018\}$ și adunând relațiile, obţinem

$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{2018^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2017\cdot 2018}$ **2p**

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2017\cdot 2018}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}=\frac{2017}{2018}<1$ **1p**

b) $\frac{k}{n+k}=\frac{n+k-n}{n+k}=\frac{n+k}{n+k}-\frac{n}{n+k}=1-\frac{n}{n+k}$, pentru orice k număr natural nenul **1p**

$\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+...+\frac{2018}{n+2018}=1-\frac{n}{n+1}+1-\frac{n}{n+2}+...+1-\frac{n}{n+2018}$ **1p**

$2017 = 2018 - n \cdot \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+2018} \right)$ şi de aici concluzia **2p**

Subiectul 3.

Fie $ABCD$ un paralelogram, $M \in (AC)$ astfel încât $AC = 3 \cdot AM$

a) Arată că M este centrul de greutate al triunghiului ABD.

b) Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, $DM \cap BC = \{N\}$ şi $AB \cap NO = \{P\}$, află valoarea raportului $\frac{OP}{PN}$.

Barem.

a) $AC = 3AM \Rightarrow AM = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3} \cdot 2AO = \frac{2}{3} AO$ **1p**

AO mediană în triunghiul ABD, deci M este centrul de greutate al triunghiului ABD **2p**

b) Fie $DM \cap AB = \{Q\}$, DQ mediană în triunghiul ABD, $AQ = QB$ **1p**

$\Delta AQD \equiv \Delta BQN \Rightarrow AD = BN \Rightarrow BC = BN$ **2p**

În triunghiul ACN, AB şi NO sunt mediane, deci P este centru de greutate, $\frac{OP}{PN} = \frac{1}{2}$ **1p**

Subiectul 4.

În patrulaterul $ABCD$, $m(\sphericalangle DAB) = 150°, AB \perp BC, AD = AB = BC$ şi $AC \cap BD = \{O\}$. Arată că:

a) Punctul D se află pe mediatoarea segmentului BC.

b) $DC = CO + OB$.

Barem.

a) Construim $DE \perp BC, E \in BC$ şi ne propunem să arătăm că E este mijlocul segmentului BC

În patrulaterul ABED (trapez dreptunghic) calculăm $m(\sphericalangle ADE) = 30°$ **1p**

Dacă $AF \perp DE, F \in DE$ obţinem:

- triunghiul AFD dreptunghic şi $m(\sphericalangle ADF) = 30° \Rightarrow AF = \frac{AD}{2}$ **1p**
- $ABEF$ dreptunghi, $BE = AF$, deci $BE = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2}$ **2p**

b) $DC = CO + OB \Leftrightarrow DB = CO + OB \Leftrightarrow DO + OB = CO + OB \Leftrightarrow DO = CO$ **1p**

Calculul măsurilor unghiurilor triunghiului OCD şi concluzia că acesta este isoscel **2p**