OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
27 IANUARIE 2018

CLASA a VI-a
BAREM

Subiectul 1.

a) Calculează $\left(\frac{1,(2)+1}{1,(2)-1}+\frac{1,3(2)+1}{1,3(2)-1}+7\frac{23}{29}\right):25$.

b) Arată că $\frac{4}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\frac{4}{5^4}+\frac{4}{5^5}+\frac{4}{5^6}=\frac{5^6-1}{5^6}$.

Barem

a) $\left(\frac{1,(2)+1}{1,(2)-1}+\frac{1,3(2)+1}{1,3(2)-1}+7\frac{23}{29}\right):25=\left(\frac{\frac{11}{9}+1}{\frac{11}{9}-1}+\frac{\frac{119}{90}+1}{\frac{119}{90}-1}+\frac{226}{29}\right):25=$ **2p**

$=\left(\frac{20}{9}\cdot\frac{9}{2}+\frac{209}{90}\cdot\frac{90}{29}+\frac{226}{29}\right):25=\left(10+\frac{209}{29}+\frac{226}{29}\right):25=\frac{725}{29}\cdot\frac{1}{25}=1$. **2p**

b) $\frac{4}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\frac{4}{5^4}+\frac{4}{5^5}+\frac{4}{5^6}=\frac{5-1}{5}+\frac{5-1}{5^2}+\frac{5-1}{5^3}+\frac{5-1}{5^4}+\frac{5-1}{5^5}+\frac{5-1}{5^6}=$ **1p**

$\frac{5}{5}-\frac{1}{5}+\frac{5}{5^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{5}{5^3}-\frac{1}{5^3}+\frac{5}{5^4}-\frac{1}{5^4}+\frac{5}{5^5}-\frac{1}{5^5}+\frac{5}{5^6}-\frac{1}{5^6}=1-\frac{1}{5^6}=\frac{5^6-1}{5^6}$. **2p**

Subiectul 2.

a) Dacă numerele $x=\overline{a_1a_2a_3...a_{2017}2017}$ şi $y=\overline{2018a_1a_2a_3...a_{2018}}$ sunt multipli ai numărului 9, află a_{2018}.

b) Determină numerele prime p şi q, p<q, ştiind că între fracţiile $\frac{1}{p}$ şi $\frac{1}{q}$ există o singură fracţie cu numărătorul 2.

Barem

a) $(a_1+a_2+a_3+...+a_{2017}+10)\vdots 9, (a_1+a_2+a_3+...+a_{2018}+11)\vdots 9$ **1p**

$((a_1+a_2+a_3+...+a_{2017})+a_{2018}+10+1)\vdots 9$ **1p**

$\left.\begin{array}{l}(a_{2018}+1)\vdots 9\\ a_{2018}-cifra\end{array}\right\}\Rightarrow a_{2018}=8$ **1p**

b) $p<q\Rightarrow\frac{1}{q}<\frac{1}{p}\Rightarrow\frac{1}{q}<\frac{2}{n}<\frac{1}{p}$, iar n este unic **1p**

$n<2q, 2p<n\Rightarrow 2p<n<2q$ şi n este unic, deci $2p, n, 2q$ sunt consecutive **2p**

$2q=2p+2\Rightarrow q=p+1$, numere consecutive, prime, deci $p=2, q=3$ **1p**

Subiectul 3.

Se consideră punctele coliniare $P_0, P_1, P_2, P_3, ..., P_{200}$, în această ordine, astfel încât $P_0P_1 = 1cm, P_1P_2 = 3cm, P_2P_3 = 5cm, P_3P_4 = 7cm$ și așa mai departe, și punctul M este mijlocul $[P_{20}P_{200}]$. Calculează lungimea segmentelor $[P_8P_9], [P_0P_{200}], [P_{20}M]$.

Barem

$P_0P_1 = 1cm = (2 \cdot 0 + 1)cm$, $P_1P_2 = 3cm = (2 \cdot 1 + 1)cm$, $P_2P_3 = 5cm = (2 \cdot 2 + 1)cm, ...$ **1p**

$P_8P_9 = (2 \cdot 8 + 1)cm = 17cm$ **1p**

$P_0P_{200} = P_0P_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + ... + P_{199}P_{200} = 1 + 3 + 5 + ... + 399 = \frac{(1+399) \cdot 200}{2} = 200^2 = 40000 \text{ cm}$ **2p**

$P_0P_{20} = 1 + 3 + 5 + ... + 39 = 20^2 = 400 \Rightarrow P_{20}P_{200} = P_0P_{200} - P_0P_{20} = 40000 - 400 = 39600cm$ **2p**

$P_{20}M = 19800cm$ **1p**

Subiectul 4.

Considerăm unghiul ascuţit XOY. În semiplanul determinat de OX în care nu se află Y se construiesc perpendicularele $(OA$ şi $(OB$ pe $(OX$, respectiv pe $(OY$. Notăm cu $(OC$ bisectoarea unghiului BOX.

a) Arată că $(OC$ este bisectoarea unghiului AOY.
b) Arată că unghiurile $\sphericalangle BOX$ şi $\sphericalangle AOY$ sunt suplementare.
c) Dacă măsura unghiului XOC este cu 20^o mai mare decât măsura unghiului XOY, află măsura unghiului AOY.

Barem

a) $m(\sphericalangle AOB) = 90° - m(\sphericalangle BOX) = m(\sphericalangle XOY)$ **1p**

$m(\sphericalangle AOC) = m(\sphericalangle AOB) + \frac{m(\sphericalangle BOX)}{2} = m(\sphericalangle XOY) + \frac{m(\sphericalangle BOX)}{2} = m(COY)$ **1p**

b) Notând $m(\sphericalangle XOY) = m(\sphericalangle AOB) = a$ şi $m(\sphericalangle BOX) = b$, $a + 2b = 90°$ **1p**

$m(\sphericalangle BOX) + m(\sphericalangle AOY) = 2b + (a + 2b + a) = 2a + 4b = 2(a + 2b) = 180°$ **1p**

c) Fie $m(\sphericalangle XOY) = a \Rightarrow m(\sphericalangle XOC) = a + 20° \Rightarrow m(\sphericalangle BOX) = 2a + 40°$ **1p**

$m(\sphericalangle BOY) = 90° \Rightarrow a + 2a + 40° = 90° \Rightarrow a = 16°40'$ **2p**