OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
27 IANUARIE 2018

CLASA a VIII-a
BAREM

Subiectul 1.

Determină numerele întregi m şi n, ştiind că: $\dfrac{m}{\sqrt{2\left(2+\sqrt{3}\right)}}+\dfrac{n}{\sqrt{2\left(2-\sqrt{3}\right)}}=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$.

Barem.

$\sqrt{2\left(2+\sqrt{3}\right)}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=\left|1+\sqrt{3}\right|=1+\sqrt{3}$ **1p**

$\sqrt{2\left(2-\sqrt{3}\right)}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=\left|1-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-1$ **1p**

$\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{\left(4-\sqrt{3}\right)^2}=\left|4-\sqrt{3}\right|=4-\sqrt{3}$ **1p**

$\dfrac{m}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{n}{\sqrt{3}-1}=4-\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{m\left(\sqrt{3}-1\right)+n\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=4-\sqrt{3}\Leftrightarrow(m+n)\sqrt{3}+(n-m)=8-2\sqrt{3}$ **2p**

Cum m şi n sunt întregi $\Rightarrow\begin{cases}m+n=-2\\ n-m=8\end{cases}\Leftrightarrow m=-5, n=3$ **2p**

Subiectul 2.

a. Arată că $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$, pentru orice a, număr real nenul, pozitiv.

b. Determină numerele reale x și y pentru care $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+7}+\sqrt{4x^2+9y^2+12xy+1}=4$.

Barem.

a. $a+\dfrac{1}{a}\geq 2\Leftrightarrow\dfrac{a^2-2a+1}{a}\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{(a-1)^2}{a}\geq 0$, adevărat, cu egalitate cu 0 dacă a=1 **2p**

b. $x^2>0\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}\geq 2\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}+7\geq 9\Rightarrow\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+7}\geq 3$, cu egalitate pentru $x^2=1$ **1p**

$\sqrt{4x^2+9y^2+12xy+1}=\sqrt{(2x+3y)^2+1}\geq 1$, cu egalitate pentru $2x+3y=0$ **2p**

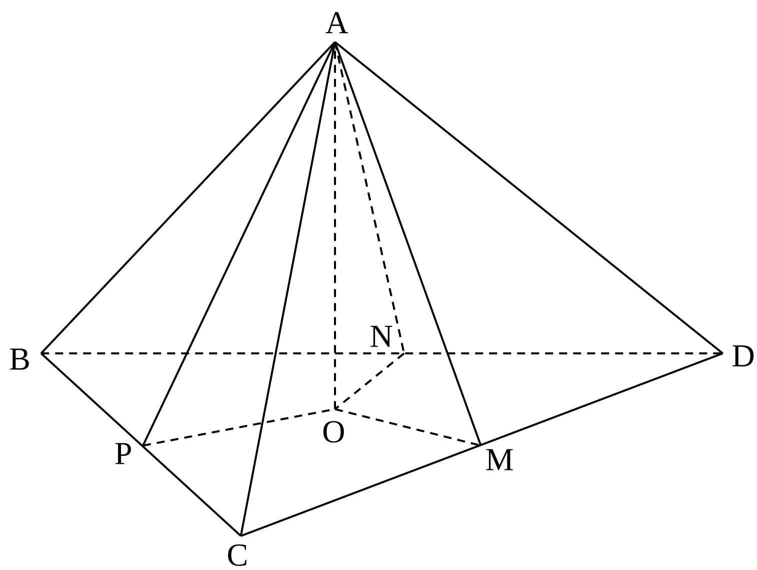
$\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+7}+\sqrt{4x^2+9y^2+12xy+1}\geq 3+1$,

iar egalitate are loc dacă $x=1, y=-\dfrac{2}{3}$ sau $x=-1, y=\dfrac{2}{3}$. **2p**

Subiectul 3.

Fie tetraedrul $ABCD$ în care medianele din A în triunghiurile ABC, ACD și ABD sunt perpendiculare două câte două. Arată că proiecția punctului A pe planul (BCD) este centrul cercului circumscris triunghiului BCD.

Barem.



Fie M, N, P mijloacele segmentelor (CD), (DB) și respectiv (BC) iar O proiecţia punctului A pe planul (BCD).

$PA \perp AM, PA \perp AN \Rightarrow PA \perp (AMN) \Rightarrow PA \perp MN$	**1p**
$MN \parallel BC$ (linie mijlocie)$\Rightarrow BC \perp PA$	**1p**
$AO \perp (ABC) \Rightarrow AO \perp BC$	**1p**
Cum $BC \perp AO, BC \perp AP, AO, AP \subset (APO) \Rightarrow BC \perp (APO) \Rightarrow BC \perp PO$,	**1p**
Obţinem că PO este mediatoarea segmentului BC,	**1p**
Analog OM este mediatoarea segmentului CD şi de aici concluzia	**2p**

OBS. După ce se demonstrază că $BC \perp PA$, se poate trage concluzia că $AB = AC$ şi analog că $AC = AD$, după care se demonstrează că $\Delta AOB \equiv \Delta AOC \equiv \Delta AOD \Rightarrow OB = OC = OD$.

Subiectul 4.

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara SA. Fie E este mijlocul segmentului SC.

a. Demonstrează că triunghiul DEB este isoscel.
b. Demonstrează că $BD < SC$.
c. Dacă M este mijlocul segmentului BE, $SM \cap BC = \{N\}$, iar $BD \cap AN = \{P\}$, arată că $MP \parallel (SAD)$.

Barem.

a. Dacă O este intersecţia diagonalelor dreptunghiului $ABCD$, EO linie mijlocie în triunghiul SAC, deci $EO \parallel SA \Rightarrow EO \perp (ABCD) \Rightarrow EO \perp BD$

În triunghiul DEB, EO este mediană şi înălţime, deci triunghiul este isoscel **2p**

b. În ΔSAC, dreptungic, $AC < SC$, $AC = BD$(diagonale în dreptunghi)$\Rightarrow BD < SC$ **2p**

c. $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAN) \perp (ABC)$, $EO \perp (ABC) \Rightarrow (EBD) \perp (ABC)$,

$(SAN) \cap (EBD) = MP \Rightarrow MP \perp (ABC) \Rightarrow MP \parallel SA \Rightarrow MP \parallel (SAD)$ **3p**

OBS. În ΔSBC se demonstrează că $\frac{BN}{NC} = \frac{1}{3}$ şi $\frac{MN}{SN} = \frac{1}{4}$

În $\Delta APD \sim \Delta NPB \Rightarrow \frac{NP}{NA} = \frac{1}{4}$ şi cu reciproca T. Lui Thales $\Rightarrow MP \parallel SA \Rightarrow MP \parallel (SAD)$