MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GORJ

Olimpiada de matematică

Faza locală, 2018

Clasa a X-a

BAREM DE NOTARE

1. Se consideră ecuaţia $4^{x+1}-(3m+1)2^x+(m-1)^2=0$.
   a) Rezolvaţi ecuaţia pentru $m=5$.
   b) Aflaţi valorile reale ale lui m pentru care ecuaţia nu are soluţii reale.

   Soluţie: a) Ecuaţia $4^{x+1}-16\cdot 2^x+16=0$ are soluţia $x=1$. (3p)

   b)Ecuaţia nu are soluţii reale dacă $\Delta < 0$ sau ($\Delta \geq 0$ și $S \leq 0$ și $P \geq 0$)
   Obţinem $m \in \left(-\infty, \frac{3}{7}\right) \cup (5, \infty)$. (caz I – 2p . caz II – 2p)

2.
   a) Comparaţi numerele $\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{8}$ *și* $\sqrt[5]{5}+\sqrt[5]{6}$.
   b) Aflaţi partea întreagă a numărului $\log_2 3+\log_3 5$.
   c) Comparaţi numerele $\log_3 7$ *și* $\sqrt[3]{5}$.

   Soluţie: a) Presupunem $\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{8} < \sqrt[5]{5}+\sqrt[5]{6} \Leftrightarrow \sqrt[5]{8}-\sqrt[5]{6} < \sqrt[5]{5}-\sqrt[5]{3}$
   $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt[5]{8^4}+\sqrt[5]{8^3\cdot 6}+\cdots+\sqrt[5]{6^4}} < \frac{2}{\sqrt[5]{5^4}+\sqrt[5]{5^3\cdot 3}+\cdots+\sqrt[5]{3^4}}$, adevărat. (2p)

   b)Avem $\frac{11}{7} < \log_2 3 < 2$ și $\frac{13}{9} < \log_3 5 < 2$. Prin însumare obţinem $\frac{190}{63} < \log_2 3+\log_3 5 < 4$, deci $[\log_2 3+\log_3 5]=3$. (3p)

   c)Avem $\log_3 7 > \frac{7}{4} > \sqrt[3]{5}$. (2p)

3. Rezolvaţi în C ecuaţia $z^6 = 1 + i$ şi arătaţi că soluţiile ei sunt afixele vârfurilor unui hexagon regulat.

Soluţie: Avem $z^6 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$, deci $z_k = \sqrt[12]{2}\left(cos\frac{\pi+8k\pi}{24} + isin\frac{\pi+8k\pi}{24}\right)$, $k = \overline{0,5}$. (3p)

Se arată că laturile sunt congruente şi unghiurile la centru ce subîntind laturile sunt congruente. (4p)

4. Fie $f: Q \to Q$, astfel încât $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in Q$.

a) Arătaţi că $f(0) = 0$ şi că f este impară .
b) Arătaţi că $f(nx) = nf(x)$, $\forall n \in Z$, $\forall x \in Q$.
c) Arătaţi că există $a \in Q$ astfel încât $f(x) = ax$, $\forall x \in Q$.

Soluţie:

a)Punând $x = y = 0$, obţinem $f(0) = 0$. Înlocuind y cu $-x$ obţinem f impară. (2p)

b)Se arată prin inducţie după n natural, apoi se foloseşte imparitatea. (2p)

c)Se arată că $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ pentru orice n întreg, apoi se deduce că $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$, pentru orice $\frac{m}{n}$ raţional. (3p)