OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală 18.02. 2018
Clasa a XII -a

Problema 1

1) Fie $r \in \boldsymbol{R}_+$ și $A_r = \{ z \in \boldsymbol{C} \mid |z| = r \}$.

a) Determinați valorile lui r pentru care A_r este parte stabilă a lui $\boldsymbol{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe și în acest caz arătați că A_r este grup în raport cu înmulțirea.

b) Fie $\boldsymbol{M}$ o submulțime a lui $\boldsymbol{C}$ stabilă la adunarea numerelor complexe și care include pe A_1.

Demonstrați că: $\{ a + ib \mid a, b \in \boldsymbol{Z}\} \subset \boldsymbol{M}$.

Problema 2

2) Fie $(G,\cdot)$ un grup având elementul neutru e.

a) Să se arate că dacă $x^2 = e \ (\forall)\, x \in G$, atunci $(G,\cdot)$ este grup abelian.

b) Să se arate că dacă există $a \in G$ astfel încât $x^3 = axa \ (\forall)\, x \in G$, atunci grupul $(G,\cdot)$ este abelian.

Problema 3

3) Se consideră funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ k & , x = 0 \end{cases}$$

a) Să se arate că f admite primitive pe $(0,\infty)$ și apoi să se determine o primitivă a sa.

b) Să se determine $k \in \boldsymbol{R}$, pentru care f admite primitive pe $\boldsymbol{R}$ și să se determine primitivele sale.

Problema 4

a) Fie $A_n = \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n \, dx$, $B_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n \, dx$, $n \in \boldsymbol{N}^*$.

Arătați că $B_n = 2A_n$, $(\forall)\, n \in \boldsymbol{N}^*$.

b) Fie $n \in \boldsymbol{N}^*$, fixat. Să se determine numărul real p astfel încât pentru orice funcție $f : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$, monoton crescătoare, să avem:

$$\int_0^1 x^n (1-x)^n (x+p)\, f(x) dx \geq 0 .$$

1.Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
2.Toate problemele sunt obligatorii;
3.Fiecare problemă se notează de la 0 la7