Etapa locală, clasa a IX –a

18.02.2018

Barem de corectură

Subiectul 1		
	$\left\{\frac{x}{2}\right\}+\{x\}+\{2x\}=x \Leftrightarrow \left\{\frac{x}{2}\right\}+\{2x\}=x-\{x\} \Leftrightarrow \left\{\frac{x}{2}\right\}+\{2x\}=[x]$ (*)	1p
	$\left\{\frac{x}{2}\right\}\in[0,1)$ și $\{2x\}\in[0,1) \Rightarrow \left\{\frac{x}{2}\right\}+\{2x\}\in[0,2)$ și (*) ne conduce la $[x]\in[0,2) \Leftrightarrow [x]\in\{0,\ 1\}$	2p
	Dacă $[x]=0$ atunci x$\in[0,1) \Rightarrow \frac{x}{2}\in\left[0,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left\{\frac{x}{2}\right\}=\frac{x}{2}$ și $$2x\in[0,2)\Rightarrow\{2x\}=2x-[2x]=\begin{cases}2x, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ 2x-1, x\in\left[\frac{1}{2},1\right)\end{cases}$$ (*) devine $\frac{x}{2}+2x=0, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\Rightarrow x=0\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ sau $\frac{x}{2}+2x-1=0, x\in\left[\frac{1}{2},1\right)\Rightarrow x=\frac{2}{5}\notin\left[\frac{1}{2},1\right)$	2p
	Dacă $[x]=1$ atunci $x\in[1,2)\Rightarrow\frac{x}{2}\in\left[\frac{1}{2},1\right)\Rightarrow\left\{\frac{x}{2}\right\}=\frac{x}{2}$ și $$2x\in[2,4)\Rightarrow\{2x\}=2x-[2x]=\begin{cases}2x-2, x\in\left[1,\frac{3}{2}\right)\\ 2x-3, x\in\left[\frac{3}{2},2\right)\end{cases}$$ Dacă $x\in\left[1,\frac{3}{2}\right)$ (*) devine $\frac{x}{2}+2x-2=1\Rightarrow x=1{,}2\in\left[1,\frac{3}{2}\right)$ Dacă $x\in\left[\frac{3}{2},2\right)$ (*) devine $\frac{x}{2}+2x-3=1\Rightarrow x=1{,}6\in\left[\frac{3}{2},2\right)\Rightarrow x\in\{0;\ 1{,}2;\ 1{,}6\}$	2p
Subiectul 2		
	Demonstrăm folosind metoda inducției matematice. Pentru n=1 avem $$2x_1+\frac{1}{(x_1-x_0)^2}\geq 3+2x_0 \Leftrightarrow$$ $$2(x_1-x_0)+\frac{1}{(x_1-x_0)^2}\geq 3, x_0<x_1\Rightarrow x_1-x_0>0$$ Arătăm că pentru $a>0$ avem $2a+\frac{1}{(a)^2}\geq 3$ Astfel $\frac{2a^3+1-3a^2}{(a)^2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(a-1)^2(2a+1)}{a^2}\geq 0$ adevărat Pentru $a=x_1-x_0>0$ formula este verificată.	3p
	Presupunem $P(n)$ adev. și demonstrăm $P(n+1)$ adev. Din $P(n)$avem că $$\frac{1}{(x_1-x_0)^2}+\cdots+\frac{1}{(x_n-x_{n-1})^2}\geq 3n+2x_0-2x_n$$ și adunând în ambii membri $2x_{n+1}+\frac{1}{(x_{n+1}-x_n)^2}$ obținem	2p

	$$2x_{n+1}+\frac{1}{(x_1-x_0)^2}+\cdots+\frac{1}{(x_{n+1}-x_n)^2}\geq$$ $\geq 3n+2x_0-2x_n+2x_{n+1}+\frac{1}{(x_{n+1}-x_n)^2}$ este o relație adevărată	
	Pentru a demonstra că $P(n+1)$ este adev. rămîne de demonstrat că $$3n+2x_0-2x_n+2x_{n+1}+\frac{1}{(x_{n+1}-x_n)^2}\geq 3(n+1)+2x_0$$ de unde obținem $2(x_{n+1}-x_n)+\frac{1}{(x_{n+1}-x_n)^2}\geq 3$ (**) Dar $x_n<x_{n+1}\Rightarrow x_{n+1}-x_n>0$ și folosind (*) obținem că (**) este adevărată.	2p
Subiectul 3		
	Fie D, E, F respectiv mijloacele laturilor $[BC],[CA],[AB]$. Dacă G este centrul de greutate al ΔABC atunci avem $\overrightarrow{GI}=\frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}\right)$ și $$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$	2p
	Dar $\overrightarrow{GN}=\frac{2}{a+b+c}\left(\frac{a}{2}\overrightarrow{GD}+\frac{b}{2}\overrightarrow{GE}+\frac{c}{2}\overrightarrow{GF}\right)$	2p
	$$\overrightarrow{GN}=\frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{GD}+b\overrightarrow{GE}+c\overrightarrow{GF}\right)=$$ $$=\frac{1}{2(a+b+c)}\left[(a+c)\overrightarrow{GB}+(a+b)\overrightarrow{GC}+(b+c)\overrightarrow{GA}\right]=$$ $=\frac{1}{2(a+b+c)}\left[(a+b+c)\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)--b\overrightarrow{GB}—c\overrightarrow{GC}-a\overrightarrow{GA}\right]=$ - $\frac{1}{2(a+b+c)}\left(a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}\right)=$ $$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GI}$$ $\Rightarrow 2\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{IG}\Rightarrow$ I,G,N coliniare	3p
Subiectul 4		
	E mijlocul lui $[AD]\Rightarrow\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}\right)=$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{BA}\right]=$ $$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(-\vec{u}+\vec{v})-\vec{u}\right]=\frac{\vec{v}-3\vec{u}}{4}$$	3p
	F mijlocul lui $[EA]\Rightarrow\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}+\vec{v}=$ $$=-\frac{1}{4}\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)+\vec{v}=-\frac{1}{4}\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}+\vec{v}=\frac{7\vec{v}-\vec{u}}{8}$$	2p
	$\frac{7}{2}\overrightarrow{BE}+\frac{5}{2}\vec{v}=\frac{7}{2}\frac{\vec{v}-3\vec{u}}{4}+\frac{5}{2}\vec{u}=\frac{7\vec{v}-\vec{u}}{8}=\overrightarrow{FC}$	2p