OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală,
18 februarie 2018
clasa a XII-a
BAREM

1) a) $r^2 = r \Rightarrow r = 0$ sau $r = 1$ .... 1 p

$A_0 = \{0\}$ este grup cu înmulțirea 1p

$A_1 = \{z \in C \| z| = 1\}$ este grup cu înmulțirea 2p

b) $\{-1, 1, i, -i\} \subset \boldsymbol{M}$ 1p

$a \in \boldsymbol{M}$ $(\forall)$ a$\in \boldsymbol{Z}$, $bi \in$ $\boldsymbol{M}$ $(\forall)$ b$\in \boldsymbol{Z}$ 1p

$a + bi \in$ $\boldsymbol{M}$ $(\forall)$ a, b$\in \boldsymbol{Z}$ 1p

2)a) $x, y \in G,\ x^2 y^2 = e \cdot e = e,$ $(xy)^2 = e$ 2p

$x^2 y^2 = (xy)^2 \Rightarrow xy = yx$ 2p

b) $x \in G,\ \ x \to ax,\ \ (ax)^3 = aaxa$ 1p

$x(axa)x = axa$ 1p

$x \cdot x^3 \cdot x = x^3 \Rightarrow x^2 = e$ .... 1p.

3) a) f continuă pe $(0, \infty) \Rightarrow f$ admite primitive pe $(0, \infty)$ 1p

$x > 0 \Rightarrow \int \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} dx = \frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{x^2}} - \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} dx$ 2p

$x > 0 \Rightarrow \int f(x) dx = \frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{x^2}} + \mathrm{C}$ 1p

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 + \lim\limits_{y \to \infty} y e^{-y} = 0$ .... 1 p

$k = 0 \Rightarrow$ f continuă pe $\boldsymbol{R} \Rightarrow$ f admite primitive. Justificarea faptului că f nu admite primitive pentru $k \neq 0$ .... 1p.

$$F : R \to R, F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{x^2}} + c_1, & x < 0 \\ c_2, & x = 0 \\ \frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{x^2}} + c_3, & x > 0 \end{cases}$$

și demonstrația faptului că $c_1 = c_2 = c_3$ pentru derivabilitatea lui F .... 1p.

4) a) În A_n facem schimbarea de variabilă $x = 1 - t$ .... 1p.

$A_n = \int_0^1 (1-t)^{n+1} t^n dt = \int_0^1 t^n (1-t)^n (1-t) dt = B_n - A_n$ .... 2p.

$2A_n = B_n$ .... 1p.

b) Particularizăm $f \equiv 1$ și $f \equiv -1$ și obținem:

$\int_0^1 x^n (1-x)^n (x+p) dx \geq 0$ și $\int_0^1 x^n (1-x)^n (x+p) dx \leq 0$ .... 1p.

$\int_0^1 x^n (1-x)^n (x+p) dx = 0 = A_n + pB_n$. Rezultă, în mod necesar, $p = -\frac{1}{2}$ .... 1p.

Reciproc se demonstrează că pentru orice funcție crescătoare

$f : [0,1] \to R$, $I(f) = \int_0^1 x^n (1-x)^n \left(x - \frac{1}{2} \right) f(x) dx \geq 0$

$x = 1 - t \Rightarrow I(f) = \int_0^1 t^n (1-t)^n \left(\frac{1}{2} - t \right) f(1-t) dt = \int_0^1 x^n (1-x)^n \left(x - \frac{1}{2} \right) (-f(1-x)) dx$

$2I(f) = \int_0^1 x^n (1-x)^n \left(x - \frac{1}{2} \right) (f(x) - f(1-x)) dx$

Concluzia rezultă ținând cont că

$\left(x - \frac{1}{2} \right) (f(x) - f(1-x)) \geq 0, \ (\forall) x \in [0,1]$ .... 1p.