Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

17 februarie 2018

Clasa a V-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	Metoda 1.	
	$314=3^2+5^2+6^2+10^2+12^2$.	**3p**
	$314^{2017}=314\cdot 314^{2016}=$	**1p**
	$\left(3^2+5^2+6^2+10^2+12^2\right)\cdot 314^{2016}=$	**1p**
	$\left(3\cdot 314^{1008}\right)^2+\left(5\cdot 314^{1008}\right)^2+\left(6\cdot 314^{1008}\right)^2+\left(10\cdot 314^{1008}\right)^2+\left(12\cdot 314^{1008}\right)^2$	**2p**
	Metoda 2.	
	$314=3^2+4^2+8^2+9^2+12^2$	
	$314^{2017}=314^{2016}\cdot 314=314^{2016}\cdot\left(3^2+4^2+8^2+9^2+12^2\right)=$	
	$\left(314^{1008}\cdot 3\right)^2+\left(314^{1008}\cdot 4\right)^2+\left(314^{1008}\cdot 8\right)^2+\left(314^{1008}\cdot 9\right)^2+\left(314^{1008}\cdot 12\right)^2$.	
2.	$11\cdot\overline{ab}=\overline{cd}+222\Leftrightarrow\overline{cd}=11\cdot\overline{ab}-222$.	**2p**
	$\overline{abcd}=\overline{ab}\cdot 100+\overline{cd}\Rightarrow$	**1p**
	$\overline{abcd}=111\cdot\overline{ab}-222\Rightarrow$	**2p**
	$\overline{abcd}=3\cdot 37\cdot\left(\overline{ab}-2\right)\Rightarrow$	**1p**
	$\overline{abcd}\,\vdots\,37$.	**1p**
3.	A=$2^{2020}\cdot\left(7\cdot 2^2+5\right)=2^{2020}\cdot 33=2^{2018}\cdot 4\cdot 33=$	**3p**
	$2^{2018}\cdot 132=2^{2018}\cdot\left(9\cdot 14+6\right)=9\cdot 2^{2018}\cdot 14+6\cdot 2^{2018}$.	**1p**
	A=B$\cdot$14+6$\cdot 2^{2018}\Rightarrow$	**1p**
	câtul împărţirii este 14, iar restul este $6\cdot 2^{2018}$,	**1p**
	$6\cdot 2^{2018}<9\cdot 2^{2018}$ (restul < împărţitorul).	**1p**

	a) Fie a,b două numere şterse de pe tablă.	**1p**
	$(a+b):7=q$, rest r, unde $r \le 6$, r număr natural;	
	$a+b=7\cdot q+r \Rightarrow 7\cdot q=(a+b)-r \Rightarrow$	
	numerele a, b se înlocuiesc cu numărul r.	
	Suma numerelor scrise pe tablă este	
	$S=1+2+3+...+1000=1000\cdot 1001:2=500\cdot 1001;$	**3p**
	$1001=7\cdot 11\cdot 13;$	
	Atunci $S=500\cdot 1001=500\cdot 7\cdot 11\cdot 13 \Rightarrow S \vdots 7;$	
	Observăm că după fiecare pas, suma numerelor obţinute	
4.	dau tot restul 0 la împărţirea cu 7;	
	De exemplu, după primul pas, suma numerelor de pe tablă	**1p**
	este $(1+2+3+...+1000)-(a+b)+r=$	
	$500\cdot 7\cdot 11\cdot 13-7\cdot q=7\cdot(500\cdot 11\cdot 13-q) \vdots 7.$	
	În final, cele două numere rămase pe tablă, dintre care unul	
	este 500, au suma divizibilă cu 7 $\Rightarrow$	
	restul împărţirii sumei lor la 7 este 0.	
	Dar $500=7\cdot 71+3 \Rightarrow$ al doilea număr este 4.	**1p**
	b) Ultimele două numere rămase pe tablă sunt 500 şi 4.	**1p**
	Aplicând procedeul, obţinem 504:7=72, rest 0	
	$\Rightarrow$ ultimul număr rămas pe tablă este 0.	