Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

17 februarie 2018

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**

	$a)$	
	$\left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)^n=a_n+b_n\cdot\sqrt{7},\ a_n,b_n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n=a_n-b_n\cdot\sqrt{7};$	1p
	$\left.\begin{array}{l}\left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)^n=a_n+b_n\cdot\sqrt{7}\\ \left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n=a_n-b_n\cdot\sqrt{7}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)^n+\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n=2\cdot a_n\in\mathbb{Z}\Rightarrow$	1p
	$\left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)^n=2\cdot a_n-\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n\Rightarrow$	
	$\left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)^n=\left(2\cdot a_n-1\right)+\left(1-\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n\right),2\cdot a_n-1\in\mathbb{Z};$	
	$\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n\in\left(0,1\right)\Rightarrow 1-\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n\in\left(0,1\right)$	
	$\left.\begin{array}{l}1-\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n\in\left(0,1\right)\\ \left(2\cdot a_n-1\right)\in\mathbb{Z}\\ \left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)^n=\left(2\cdot a_n-1\right)+\left(1-\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$	
	$\left\{\left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)^n\right\}=1-\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n.$	1p
1.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)^n\right\}^{\frac{1}{\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n\right)^{\frac{1}{\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n}}=e^{-1}.$	1p
	Metoda 2.	
	Avem $\left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)^n+\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n\in\mathbb{Z},\ \left(\forall\right)n\in\mathbb{N}$ şi cum	
	$\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n\in\left(0,1\right)$ deducem că	
	$\left[\left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)^n\right]=\left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)^n+\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n-1\Leftrightarrow$	
	$1-\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n=\left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)^n-\left[\left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)^n\right]\Rightarrow$	
	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(11+4\cdot\sqrt{7}\right)^n\right\}^{\frac{1}{\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n\right)^{\frac{1}{\left(11-4\cdot\sqrt{7}\right)^n}}=e^{-1}.$	
	$b)$ Evident $\mathrm{Tr}\left(X\right)=Tr\left(A\cdot B-B\cdot A\right)=Tr\left(A\cdot B\right)-Tr\left(B\cdot A\right)=0.$	1p
	$X\in M_2\left(\mathbb{R}\right),$ deci din ecuaţia Hamilton-Cayley, obţinem:	
	$X^2-I_2=O_2$ sau $\left(I_2-X\right)\cdot\left(I_2+X\right)=\mathrm{O}_2.$	1p
	Dacă presupunem că I_2-X este inversabilă, obţinem $I_2+X=\mathrm{O}_2$	
	sau $X=-I_2\Rightarrow\mathrm{Tr}\left(X\right)=-2=0,$ fals.	
	Deci I_2-X nu este inversabilă.	1p

2.	Dăm succesiv valori lui $x \geq 1$ în inegalitatea din enunţ: $\frac{1}{2} \cdot a \leq f(1) \leq a$ $\frac{1}{2} \cdot a^2 \leq f(2) \leq a^2$ . . . $\frac{1}{2} \cdot a^n \leq f(n) \leq a^n$ Însumând aceste inegalităţi,obţinem:	2p
	$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} a^k \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n} a^k \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a^n - 1}{a-1} \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq a \cdot \frac{a^n - 1}{a-1} \Leftrightarrow$	2p
	$\sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a-1}} \cdot \sqrt[n]{a^n - 1} \leq a_n \leq \sqrt[n]{\frac{a}{a-1}} \cdot \sqrt[n]{a^n - 1};(1)$	1p
	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a-1}} \cdot \sqrt[n]{a^n - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a}{a-1}} \cdot \sqrt[n]{a^n - 1} = a \qquad (2)$	1p
	Din 1,2 $\overset{T.\ cleştelui}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow$ şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent cu limita a.	1p

3.	Notăm $X^2 = Y \Rightarrow Y \neq I_2,\ Y \neq -I_2, Y^2 = I_2$. Din $Y^2 = I_2 \Rightarrow \det Y \in \{-1,1\}$. Alegem $\det Y = -1$. $\Rightarrow$ din ecuaţia lui Cayley – Hamilton: $Y^2 - Tr(Y)\cdot Y + \det(Y)\cdot I_2 = O_2 \Rightarrow$ $I_2 - Tr(Y)\cdot Y - I_2 = O_2 \Rightarrow Tr(Y) = 0;$ $\left.\begin{matrix} Tr(Y)=0 \\ \det Y=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},\ -a^2 - b\cdot c = -1 \Leftrightarrow b\cdot c = 1-a^2.$ Alegem $b = 1-a,\ c = 1+a \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{pmatrix}$ care verifică $Y \neq \pm I_2, Y^2 = I_2, a \in \mathbb{C}$. Din $X^2 = Y \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \det X \in \{\pm i\}$. Alegem $\det X = i$. $X \in M_2(\mathbb{C})$ şi conform ecuaţiei lui Hamilton-Cayley $\Rightarrow$ $X^2 - Tr(X)\cdot X + \det(X)\cdot I_2 = O_2 \Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{pmatrix} - Tr(X)\cdot X + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} a+i & 1-a \\ 1+a & -a+i \end{pmatrix} = Tr(X)\cdot X \Rightarrow Tr^2(X) = 2\cdot i \Leftrightarrow Tr(X) \in \{1+i, -1-i\}$. Alegem $Tr(X) = 1+i \Rightarrow \begin{pmatrix} a+i & 1-a \\ 1+a & -a+i \end{pmatrix} = (1+i)\cdot X$ sau $X = \frac{1}{1+i}\cdot\begin{pmatrix} a+i & 1-a \\ 1+a & -a+i \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{C}$. deci ecuaţia are o infinitate de soluţii în condiţiile date.	2p 1p 1p 1p 1p 1p

4.	Soluţie: a)Demonstrăm prin metoda reducerii la absurd: presupunem că lg3 $\in \mathbb{Q} \Rightarrow$ există m,n $\in \mathbb{N}^*$ astfel încât lg3=$\dfrac{m}{n} \Rightarrow 10^m = 3^n \Rightarrow 10 \vdots 3$, fals. b) Evident $2018 \neq 3^n,\ n \in \mathbb{N}$. Pentru ca primele patru cifre ale lui 3^n să fie 2018 este necesar să existe k $\in \mathbb{N}$ astfel ca: $2018 \cdot 10^k \le 3^n < 2019 \cdot 10^k$. (1) Logaritmând în baza 10, obţinem: $\lg 2018 + k \le n \cdot \lg 3 < \lg 2019 + k \Leftrightarrow \lg 2018 \le n \cdot \lg 3 - k < \lg 2019$. Deoarece $\lg 3 \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \overset{T.Kronecker}{\Rightarrow}$ mulţimea A=$\{n \cdot \lg 3 - k \,/\, n, k \in \mathbb{N}\}$ este densă în $\mathbb{R}$, deci A va avea cel puţin 1 element (de fapt o infinitate) în intervalul $[\lg 2018, \lg 2019)$, deci există n,k $\in \mathbb{N}$ pentru care are loc inegalitatea (1).	2p 1p 1p 1p 1p 1p