INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN GALAŢI
Str.Portului Nr.55 B ☎ 0372362000; 0372362001 🖷 0236319396
E-mail: info@isj.gl.edu.ro; Adresă site: www.isj.gl.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

ROMÂNIA

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

17 februarie 2018

Clasa a X-a

Problema 1.

Să se rezolve ecuaţia: $\log_8\left(27^x-1\right)=\log_{27}\left(8^x+1\right)$.

Problema 2.

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$.

Să se demonstreze că $|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2 \leq 9$. Când are loc egalitatea?

Problema 3.

Fie a un număr natural şi $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=a$ şi $a_{n+1}=1+a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$, $(\forall)n\geq 1$.

a) Arătaţi că oricare doi termeni consecutivi ai şirului diferă între ei printr-un pătrat perfect.

b) Arătaţi că ecuaţia $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+1=(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)$ are soluţii cu componente distincte şi nenule în mulţimea numerelor naturale.

Problema 4.

Fie numerele $a,b,c\in(0,1)$ sau $a,b,c\in(1,\infty)$. Să se determine valoarea minimă a expresiei $\mathrm{E}(a,b,c)=\log_a b+\log^2{}_b c+\log^3{}_c a$ şi tripletele de numere (a,b,c) pentru care expresia $\mathrm{E}(a,b,c)$ este minimă.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7