Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

17 februarie-2018

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.	$a^2+b^2-10\cdot a\cdot\sqrt{6}-12\cdot b\cdot\sqrt{5}+330\le 0 \Leftrightarrow$ $a^2-2\cdot a\cdot\left(5\cdot\sqrt{6}\right)+\left(5\cdot\sqrt{6}\right)^2+b^2-2\cdot b\cdot\left(6\cdot\sqrt{5}\right)+\left(6\cdot\sqrt{5}\right)^2\le 0\Leftrightarrow$	**1p**
	$\left(a-5\cdot\sqrt{6}\right)^2+\left(b-6\cdot\sqrt{5}\right)^2\le 0;(1)$	**2p**
	Dar $\left(a-5\cdot\sqrt{6}\right)^2\ge 0,(\forall)a\in\mathbb{R}(2)$ $\left(b-6\cdot\sqrt{5}\right)^2\ge 0,(\forall)b\in\mathbb{R}(3)$	**1p**
	Din 1,2,3 $\Rightarrow a=5\cdot\sqrt{6},\ b=6\cdot\sqrt{5}.$	**1p**
	Atunci x=$\left(\frac{6}{6\cdot\sqrt{5}}+\frac{5}{5\cdot\sqrt{6}}\right)\cdot\left(6\cdot\sqrt{5}-5\cdot\sqrt{6}\right)=$ $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)=$	**1p**
	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)=1\in\mathbb{N}.$	**1p**

2.	a) $x^5-5\cdot x+4=\ x^5-x^4+x^4-x^3+x^3-x^2+x^2-x-4x+4=$ $x^4\cdot(x-1)+x^3\cdot(x-1)+x^2\cdot(x-1)+x\cdot(x-1)-4\cdot(x-1)=$ $(x-1)\cdot\left(x^4+x^3+x^2+x-4\right)=$ $(x-1)\cdot\left(x^4-x^3+2\cdot x^3-2\cdot x^2+3\cdot x^2-3\cdot x+4\cdot x-4\right)=$ $(x-1)\cdot\left[x^3\cdot(x-1)+2\cdot x^2\cdot(x-1)+3\cdot x\cdot(x-1)+4\cdot(x-1)\right]=$ $(x-1)^2\cdot\left(x^3+2\cdot x^2+3\cdot x+4\right)\geq 0,(\forall)x\in(0,\infty).$	1p 1p 1p
	b) Aplicăm inegalitatea de la punctul a) pentru numerele a_i, $i\in\{1,2,...,8\}$; $a_1^5\geq 5\cdot a_1-4$ $a_2^5\geq 5\cdot a_2-4$ . . . $a_8^5\geq 5\cdot a_8-4$ Prin adunarea celor 8 inegalităţi, obţinem: $a_1{}^5+a_2{}^5+...+a_8{}^5\geq 5\cdot(a_1+a_2+...+a_8)-32=5\cdot 410-32=2018.$ Egalitatea nu este posibilă. Ar rezulta că $a_1=a_2=...=a_8=1-$contradicţie.	2p 2p

	a) Dreptele AO′ şi D′C′ sunt coplanare, incluse în planul dreptunghiului ABC′D Deoarece $C'O' \parallel AD'$ şi $C'O' = \frac{1}{2} \cdot AD' \Rightarrow [C'O']$ este linie mijlocie în $\triangle PAD' \Rightarrow$ C′ este mijlocul lui $[D'P] \Rightarrow$ C′P= D′C′ $= 4cm$.	1p
	Fie $PQ \parallel CC'$, $Q \in DC \Rightarrow C'PQC$ este pătrat şi din $CC' \perp (ABCD) \Rightarrow$ $PQ \perp (ABCD)$. Fie $QE \perp AC$, $E \in AC$. Fie $AC \cap BD = \{R\}$. Din ABCD pătrat $\Rightarrow AC \perp BD$; $\left.\begin{array}{l} QE \perp AC \\ BR \perp AC \\ QE, BR \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow QE \parallel DR.$ $\triangle EQC \equiv \triangle RDC$ pentru că QC=DC, $\measuredangle ECQ \equiv \measuredangle DCR$(unghiuri opuse la vârf), $\measuredangle QEC \equiv \measuredangle DRC$(unghiuri drepte) $\Rightarrow QE = DR = \frac{1}{2} \cdot BD = 2 \cdot \sqrt{2} cm.$	1p
	$\left.\begin{array}{l} PQ \perp (ABCD) \\ QE \perp AC \\ QE, AC \subset (ABCD) \end{array}\right\} \overset{T.3.\perp}{\Rightarrow} PE \perp AC \Rightarrow d(P, AC) = PE;$	1p
	$\triangle PQE : m(\measuredangle PQE) = 90^\circ \overset{T.P}{\Rightarrow} PE^2 = PQ^2 + QE^2 \Rightarrow PE^2 = 16 + 8 = 24 \Rightarrow$ $PE = 2 \cdot \sqrt{6} cm.$	1p
	b) Metoda 1. Fie $MN \perp OB$, $N \in (OB)$. În $\triangle MNB$: $m(\measuredangle MNB) = 90^\circ$, $m(MBN) = 45^\circ$,	1p
	Fie $MN = NB = x\ cm, 0 < x < 4 \Rightarrow MB = x\sqrt{2}$. $BO = 2 \cdot \sqrt{2}$, $NB = x \Rightarrow ON = 2 \cdot \sqrt{2} - x$. În $\triangle MON$: $m(\measuredangle MNO) = 90^\circ \Rightarrow tg(\measuredangle MON) = \frac{x}{2 \cdot \sqrt{2} - x}$; (1) dar $\sin(\measuredangle MON) = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos(\measuredangle MON) = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow tg(\measuredangle MON) = 2$ (2)	1p
	din $1,2 \Rightarrow \frac{x}{2 \cdot \sqrt{2} - x} = 2 \Rightarrow x = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3}$. $MB = x \cdot \sqrt{2} \Rightarrow MB = \frac{8}{3} cm.$	1p

Metoda 2.

Fie $MN \perp OB, N \in (OB)$.

În $\triangle MNB$: $\text{m}(\measuredangle MNB)=90^\circ$, $\text{m}(MBN)=45^\circ$,

Fie $MN = NB = x\ cm, 0 < x < 4 \Rightarrow MB = x \cdot \sqrt{2}$.

În $\triangle MON$: $\text{m}(\measuredangle MNO)=90^\circ \Rightarrow \sin(\measuredangle MON) = \frac{MN}{OM} \Rightarrow \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5} = \frac{x}{OM} \Rightarrow OM$

În $\triangle MON$: $\text{m}(\measuredangle MNO)=90^\circ \overset{T.P.}{\Rightarrow} ON^2 = OM^2 - MN^2 \Rightarrow ON^2 = \frac{5\cdot x^2}{4} - x^2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dar ON}=2\cdot\sqrt{2}-x \\ ON = \frac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{2} = 2\cdot\sqrt{2} - x \Rightarrow x = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{3};$$

$$\left.\begin{array}{l} BM = x\cdot\sqrt{2} \\ x = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow BM = \frac{8}{3}cm.$$

	Metoda 3. În $\triangle$OMN $\left(m(\measuredangle MNO)=90^\circ\right)\overset{T.P}{\Rightarrow} OM^2=ON^2+MN^2 \Rightarrow OM^2=\left(2\sqrt{2}-x\right)^2+x^2 \Rightarrow$ $OM=\sqrt{\left(2\sqrt{2}-x\right)^2+x^2}$; OMN $\left(m(\measuredangle MNO)=90^\circ\right)\Rightarrow \sin(\measuredangle MON)=\frac{OM}{MN}\Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{\left(2\sqrt{2}-x\right)^2+x^2}}{x}\Leftrightarrow$ $3x^2-16\sqrt{2}\cdot x+32=0\Leftrightarrow\left(x\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{32}{3}=0\Leftrightarrow$ $\left(x\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(x\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)=0\Rightarrow$ $x\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=0\Rightarrow x=4\sqrt{2}$ (nu convine) $x\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=0\Rightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$; Dar $BM=x\sqrt{2}\Rightarrow BM=\frac{8}{3}cm$ Metoda 4. $A_{\triangle BOM}=\frac{OB\cdot BM\cdot\sin(\measuredangle MBO)}{2}\Rightarrow A_{\triangle BOM}=\frac{2\sqrt{2}\cdot x\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ}{2}\Rightarrow$ $A_{\triangle BOM}=x\sqrt{2}$. $A_{\triangle BOM}=\frac{OB\cdot OM\cdot\sin(\measuredangle MOB)}{2}\Rightarrow x\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}\cdot OM\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2}\Rightarrow OM=\frac{x\cdot\sqrt{5}}{2}$; În $\triangle$OMN $\left(m(\measuredangle MNO)=90^\circ\right)\overset{T.P}{\Rightarrow} OM^2=ON^2+MN^2\Rightarrow\frac{5\cdot x^2}{4}=\left(2\sqrt{2}-x\right)^2+x^2\Leftrightarrow$ $3x^2-16\sqrt{2}\cdot x+32=0\Leftrightarrow\left(x\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{32}{3}=0\Leftrightarrow$ $\left(x\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(x\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)=0\Rightarrow$ $x\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=0\Rightarrow x=4\sqrt{2}$ (nu convine) $x\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=0\Rightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$; Dar $BM=x\sqrt{2}\Rightarrow BM=\frac{8}{3}cm$	

4.	Soluţie: Aria unei feţe laterale este 21 cm^2. Conform principiului cutiei, există pe una din cele trei feţe laterale cel puţin 22 puncte (altfel, dacă prin reducere la absurd, pe fiecare faţă ar fi cel mult 21 puncte, atunci numărul punctelor ar fi $21\cdot 3=63<64$). Împărţim acea faţă în 21 de pătrate cu lungimea laturii de 1 cm. Aplicând din nou principiul cutiei, va exista un pătrat care conţine pe suprafaţa lui cel puţin două puncte. Distanţa dintre aceste puncte este cel mult egală cu diagonala pătratului, adică $\sqrt{2}$ iar $\sqrt{2}<1,5$.	1p 2p 1p 1p 2p