Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

17 februarie-2018

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a) $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}$;	1p
	$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$;	1p
	$\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$ (1)	
	$\frac{AM}{MB}=\frac{PB}{PA}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{PB}{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{PB}\Rightarrow\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$;	
	$\frac{DQ}{QC}=\frac{CN}{ND}\Rightarrow\frac{DQ}{DC}=\frac{CN}{CD}\Rightarrow\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{NC}\Rightarrow\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$;	1p
	Din relaţia 1 $\Rightarrow\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.	1p
	b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$	1p
	$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DQ}$;	1p
	$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.	1p

	Folosim inegalitatea mediilor:	
	$\left.\begin{array}{l} 2\cdot x^2+y^2\geq 2\cdot x\cdot y\cdot\sqrt{2} \\ x^2+2\cdot z^2\geq 2\cdot x\cdot z\cdot\sqrt{2} \end{array}\right\}\Rightarrow\left(2\cdot x^2+y^2\right)\cdot\left(x^2+2\cdot y^2\right)\geq 8\cdot x^2\cdot y\cdot z;$	1p
	Analog, $\left(3\cdot y^2+z^2\right)\cdot\left(y^2+3\cdot x^2\right)\geq 12\cdot x\cdot y^2\cdot z;$	1p
	$\left(5\cdot z^2+x^2\right)\cdot\left(z^2+5\cdot y^2\right)\geq 20\cdot x\cdot y\cdot z^2;$	1p
	$\left(2\cdot x^2+y^2\right)\cdot\left(x^2+2\cdot y^2\right)\geq 8\cdot x^2\cdot y\cdot z\Rightarrow$	
	$\frac{2\cdot x}{\left(2\cdot x^2+y^2\right)\cdot\left(x^2+2\cdot y^2\right)}\leq\frac{1}{4\cdot x\cdot y\cdot z}=\frac{1}{24};(1)$	1p
2.	$\left(3\cdot y^2+z^2\right)\cdot\left(y^2+3\cdot x^2\right)\geq 12\cdot x\cdot y^2\cdot z\Rightarrow$	1p
	$\frac{3\cdot y}{\left(3\cdot y^2+z^2\right)\cdot\left(y^2+3\cdot x^2\right)}\leq\frac{1}{4\cdot x\cdot y\cdot z}=\frac{1}{24};(2)$	1p
	$\left(5\cdot z^2+x^2\right)\cdot\left(z^2+5\cdot y^2\right)\geq 20\cdot x\cdot y\cdot z^2\Rightarrow$	
	$\frac{5\cdot z}{\left(5\cdot z^2+x^2\right)\cdot\left(z^2+5\cdot y^2\right)}\leq\frac{1}{4\cdot x\cdot y\cdot z}=\frac{1}{24};(3)$	
	Din 1,2,3, adunând, obţinem:	
	$\frac{2\cdot x}{\left(2\cdot x^2+y^2\right)\cdot\left(x^2+2\cdot y^2\right)}+\frac{3\cdot y}{\left(3\cdot y^2+z^2\right)\cdot\left(y^2+3\cdot x^2\right)}+$	1p
	$+\frac{5\cdot z}{\left(5\cdot z^2+x^2\right)\cdot\left(z^2+5\cdot y^2\right)}\leq\frac{3}{24}=\frac{1}{8}.$	

3.	Metoda 1. Fie R mijlocul segmentului (AC) şi AP $\cap$ MR=$\{I\} \Rightarrow$ I este mijlocul lui (MR); $\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AN}{AR}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AN}{NR}=\frac{2}{1}$; Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul AIR cu transversala M-Q-N: $\frac{MI}{MR}\cdot\frac{NR}{NA}\cdot\frac{AQ}{QI}=1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{AQ}{QI}=1 \Rightarrow \frac{AQ}{QI}=4 \Rightarrow \frac{AQ}{AI}=\frac{4}{5}$; $\frac{AI}{AP}=\frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AP} \Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$; $\overrightarrow{AQ}=\frac{4}{5}\cdot\overrightarrow{AI}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{5}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$; $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{10}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{5}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{2}{15}\cdot\overrightarrow{AC}$ Metoda 2. Să calculăm $\frac{AQ}{AP}=x$. $S_{\triangle AMQ}+S_{\triangle AQN}=S_{\triangle AMN}$ (1) $\frac{S_{\triangle AMQ}}{S_{\triangle ABP}}=\frac{1}{2}\cdot x$; $S_{\triangle AMQ}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot S_{\triangle ABP}=\frac{x}{4}\cdot S_{\triangle ABC}$; (2) La fel $S_{\triangle AQN}=\frac{1}{3}\cdot x\cdot S_{\triangle ACP}=\frac{x}{6}\cdot S_{\triangle ABC}$ $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{6}\cdot S_{\triangle ABC}$ (3) Din 1,2,3 $\Rightarrow \frac{x}{4}\cdot S_{\triangle ABC}+\frac{x}{6}\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{6}\cdot S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \frac{x}{6}+\frac{x}{4}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow$ $5\cdot x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$.	2p 2p 1p 1p 1p

Metoda 3.

$\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2};$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fie E} \in (NC),\ \text{NE=EC=AN} \\ \text{Dar AM=MB} \\ \text{AP} \cap \text{BE=}\{U\}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{QU}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\triangle APC \\ \textit{transversala}:\text{B-U-E}\end{array}\right\} \overset{T.M}{\Rightarrow} \frac{BP}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AU}{UP}=1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{AU}{UP}=1 \Rightarrow \frac{AU}{UP}=4 \Rightarrow$$

$$\frac{AU}{AP}=\frac{4}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AU}=\frac{4}{5}\cdot\overrightarrow{AP} \qquad (1)$$

Dar $\overrightarrow{AP}=$ vector mediană în ABC $\Rightarrow \overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ (2)

Din 1,2 $\Rightarrow \overrightarrow{AU}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AU}=\frac{2}{5}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{5}\cdot\Big(\overrightarrow{AB}+$

$$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{10}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{AC};$$

$$\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{5}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{2}{15}\cdot\overrightarrow{AC}$$

4.	Soluţie: Numărul submulţimilor cu trei elemente în progresie aritmetică, conţinute în mulţimea $(1,2,3,...,n)$, este egal cu numărul progresiilor aritmetice cu raţie pozitivă: - cu raţia 1 sunt: $\{1,2,3\};\{2,3,4\};\{3,4,5\};...\{n-2,n-1,n\} \Rightarrow n-2$ submulţimi cu 3 elemente - cu raţia 2 sunt: $\{1,3,5\};\{2,4,6\};\{3,5,7\};...\{n-4,n-2,n\} \Rightarrow n-4$ submulţimi cu 3 elemente - cu raţia 3 sunt: $\{1,4,7\};\{2,5,8\};\{3,7,10\};...\{n-6,n-3,n\} \Rightarrow n-6$ submulţimi cu 3 elemente şi aşa mai departe.... Apar 2 cazuri: 1. Dacă $n=2\cdot k$, $k \in \mathrm{N}^*, k \geq 2 \Rightarrow$ raţia maximă este k-1 $\Rightarrow$ $\{1,k,2k-1\};\{2,k,2k\} \Rightarrow 2$ submulţimi cu 3 elemente. În acest caz, numărul total de submulţimi cu 3 elemente, este 2+4+6+8+...+$(2k-2)=k\cdot(k-1)$ 2. Dacă $n=2\cdot k+1$, $k \in \mathrm{N}^*, k \geq 1 \Rightarrow$ raţia maximă este k $\Rightarrow$ $\{1,k+1,2k+1\} \Rightarrow 1$ submulţime cu 3 elemente În acest caz, numărul total de submulţimi cu 3 elemente, este $1+3+5+...+(2k-1)=k^2$. În concluzie, numărul submulţimilor cu trei elemente este: $\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right]$.	2p 1p 1p 1p 1p 1p