Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

17 februarie 2018

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. probleme	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a)Metoda 1.	
	Condiţii: $27^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (0,\infty)$.	1p
	Notăm $\log_8(27^x - 1) = \log_{27}(8^x + 1) = t \Leftrightarrow \begin{cases} 27^x - 1 = 8^t \\ 8^x + 1 = 27^t \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$	1p
	$27^x + 8^x = 27^t + 8^t$;	
	Cum funcţia $f:\mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = 27^x + 8^x$ este strict crescătoare, deci injectivă, avem $f(x) = f(t)$ $\Rightarrow x = t$;	1p
	Atunci obţinem ecuaţia: $27^x - 1 = 8^x$.	1p
	Împărţind ecuaţia prin 27^x, se obţine: $\left(\frac{8}{27}\right)^x + \left(\frac{1}{27}\right)^x = 1$;	
	Fie funcţia $g(x) = \left(\frac{8}{27}\right)^x + \left(\frac{1}{27}\right)^x$, $x > 0$;	1p
	Din g funcţie strict descrescătoare, deci injectivă, obţinem că ecuaţia are cel mult o soluţie.	1p
	Observăm că $g\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ soluţie.	1p

	Metoda 2. Considerăm funcțiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_8\left(27^x-1\right)$ şi $g:\mathbb{R}\to(0,\infty),\ g(x)=\log_{27}\left(8^x+1\right)$. Avem $f\circ g=1_{\mathbb{R}}$ şi $g\circ f=1_{(0,\infty)}$, f, g funcții strict crescătoare. Dacă $f(x)>x,\ x>0\Rightarrow x=(g\circ f)(x)>g(x)$. Aşadar, $g(x)<x<f(x)\ (fals)$. Dacă $f(x)<x,\ x>0\Rightarrow x=(g\circ f)(x)<g(x)$. Aşadar, $g(x)>x>f(x)\ (fals)$ Dacă $f(x)=x\Leftrightarrow\log_8\left(27^x-1\right)=x\Leftrightarrow 27^x-1=8^x\Leftrightarrow 27^x=1+8^x$ $\Leftrightarrow 1=\left(\frac{1}{27}\right)^x+\left(\frac{8}{27}\right)^x$ Fie funcția $h(x)=\left(\frac{8}{27}\right)^x+\left(\frac{1}{27}\right)^x,\ x>0;$ Din h funcție strict descrescătoare, deci injectivă, obținem că ecuația are cel mult o soluție. Observăm că $h\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1\Rightarrow x=\frac{1}{3}$ soluție.	

2.

Metoda 1.Are loc egalitatea: $\left|z_i - z_j\right|^2 = \left(z_i - z_j\right)\cdot\overline{\left(z_i - z_j\right)} = \left(z_i - z_j\right)\cdot\left(\overline{z_i} - \overline{z_j}\right) =$

$z_i \cdot \overline{z_i} - z_i \cdot \overline{z_j} - z_j \cdot \overline{z_i} + z_j \cdot \overline{z_j} =$ 2p

$\left|z_i\right|^2 + \left|z_j\right|^2 - \left(z_i \cdot \overline{z_j} + z_j \cdot \overline{z_i}\right) = 2 - \left(z_i \cdot \overline{z_j} + z_j \cdot \overline{z_i}\right).$

$\left|z_1 - z_2\right|^2 + \left|z_2 - z_3\right|^2 + \left|z_3 - z_1\right|^2 \le 9 \Leftrightarrow$

$\left(z_1 - z_2\right)\cdot\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) + \left(z_3 - z_2\right)\cdot\left(\overline{z_3} - \overline{z_2}\right) + \left(z_1 - z_3\right)\cdot\left(\overline{z_1} - \overline{z_3}\right) \le 9 \Leftrightarrow$

$6 - \left(z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_3} + z_3 \cdot \overline{z_2} + z_1 \cdot \overline{z_3} + z_3 \cdot \overline{z_1}\right) \le 9 \Leftrightarrow$

$6 - \left(z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + z_3 \cdot \overline{z_3} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_3} + z_3 \cdot \overline{z_2} + z_1 \cdot \overline{z_3} + z_3 \cdot \overline{z_1}\right) + \left(z_1 \cdot \overline{z_1}\right.$ 1p

$6 - \left(z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + z_3 \cdot \overline{z_3} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_3} + z_3 \cdot \overline{z_2} + z_1 \cdot \overline{z_3} + z_3 \cdot \overline{z_1}\right) + 3 \le 9 \Leftrightarrow$

$\left(z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + z_3 \cdot \overline{z_3} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_3} + z_3 \cdot \overline{z_2} + z_1 \cdot \overline{z_3} + z_3 \cdot \overline{z_1}\right) \ge 0 \Leftrightarrow$ 1p

$\left(z_1 + z_2 + z_3\right)\cdot\left(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left(z_1 + z_2 + z_3\right)\cdot\overline{\left(z_1 + z_2 + z_3\right)} \ge 0 \Leftrightarrow$

$\left|z_1 + z_2 + z_3\right|^2 \ge 0,$ adevărat. 2p

Egalitatea are loc pentru $\left|z_1 + z_2 + z_3\right|^2 = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 0.$

Observaţie: Fie punctele A,B,C cu afixele respectiv z_1, z_2, z_3. 1p

Egalitatea are loc când $z_G = 0 \Leftrightarrow$

centrul de greutate $G = O -$ centrul cercului cirgumscris $\triangle ABC \Rightarrow$

$\triangle ABC$ este echilateral.

Metoda 2.Fie punctele A,B,C cu afixele respectiv z_1, z_2, z_3.

Atunci AB=$\left|z_1 - z_2\right|$, AC=$\left|z_1 - z_3\right|$, BC $= \left|z_3 - z_2\right|$;

Atunci relaţia $\left|z_1 - z_2\right|^2 + \left|z_2 - z_3\right|^2 + \left|z_3 - z_1\right|^2 \le 9 \Leftrightarrow$

$AB^2 + AC^2 + BC^2 \le 9 \qquad (1)$

Dacă $z_1 = z_2 \Leftrightarrow A = B$

Atunci relaţia $(1) \Leftrightarrow AC^2 \le \frac{9}{2},$ adevărat (raza cercului este 1).

Dacă z_1, z_2, z_3 sunt diferite, atunci punctele A,B,C formează un triunghi.

Avem AB=2sinC,AC=2sinB, BC=2sinA.

Atunci relaţia $(1) \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow$

$\sin^2 A + \frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2C}{2} \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow$

$\sin^2 A + \cos A \cdot \cos(B - C) \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow$

$\cos^2 A - \cos A \cdot \cos(B - C) + \frac{1}{4} \ge 0 \Leftrightarrow$

$\left(\cos A - \frac{1}{2}\cdot\cos(B - C)\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\sin^2(B - C) \ge 0 \ (A).$

Egalitatea are loc pentru B=C şi cosA $= \frac{1}{3\;2} \Rightarrow$

$\triangle ABC$ este echilateral sau $z_1 + z_2 + z_3 = 0.$

3.	$a)\ a_2 = 1 + a_1 \Rightarrow a_2 - a_1 = 1^2$; Pentru n ≥ 2 obţinem $a_{n+1} - a_n = 1 + a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n - a_n =$ $1 + a_n \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1} - 1) =$ $1 + (1 + a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1}) \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1} - 1) =$ $1 + (a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1})^2 - 1 = (a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1})^2$. $b)$Conform punctului a) $\Rightarrow a_{n+1} - a_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1})^2, (\forall) n \geq 2$ şi $a_2 - a_1 = 1^2$. Alegem $a_1 = a = 1$ şi definim şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ ca la punctul a). Dând valori lui n, obţinem: $(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n)^2 = a_{n+2} - a_{n+1}$ $(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1})^2 = a_{n+1} - a_n$ . . . $a_1^2 = a_3 - a_2$ $1 = a_2 - a_1$ Adunând, obţinem $1 + a_1^2 + ... + (a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n)^2 = a_{n+2} - a_1; (1)$ Notăm $x_1 = a_1,\ x_2 = a_1 \cdot a_2, ...,\ x_n = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$; Evident $x_1,\ x_2, ..,\ x_n > 0$ şi $x_1 < x_2 < ... < x_n$; Calculăm $(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot ... \cdot (1 + x_n) =$ $(1 + a_1) \cdot (1 + a_1 \cdot a_2) \cdot ... \cdot (1 + a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n) = a_2 \cdot ... \cdot a_{n+1} = 1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n+1} =$ $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n+1} = a_{n+2} - a_1$; Cu notaţiile făcute, egalitatea 1 se scrie: $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + 1 = (1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot ... \cdot (1 + x_n)$ şi acest lucru arată că ecua nenulă cu componente distincte în mulţimea numerelor naturale.	1p 2p 1p 1p 1p 1p

4.	Dacă $a,\ b,\ c\in(0,1)$ sau $a,\ b,\ c\in(1,\infty)\Rightarrow \log_a b>0,\ \log_b c>0,\ \log_c a>0.$	1p
	Evident $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\frac{\lg b}{\lg a}\cdot\frac{\lg c}{\lg b}\cdot\frac{\lg a}{\lg c}=1;$	1p
	Aplicăm inegalitatea mediilor scriind fiecare termen al expresiei astfel: $\log_a b=\frac{1}{6}\cdot\log_a b+\frac{1}{6}\cdot\log_a b+\frac{1}{6}\cdot\log_a b+\frac{1}{6}\cdot\log_a b+\frac{1}{6}\cdot\log_a b+\frac{1}{6}\cdot\log_a b$ $\log^2{}_b c=\frac{1}{3}\cdot\log^2{}_b c+\frac{1}{3}\cdot\log^2{}_b c+\frac{1}{3}\cdot\log^2{}_b c$ $\log^3{}_c a=\frac{1}{2}\cdot\log^3{}_c a+\frac{1}{2}\cdot\log^3{}_c a;$ Atunci $\mathrm{E}(a,b,c)$ este suma a 6+3+2=11 termeni pozitivi; Aplicăm inegalitatea mediilor pentru cei 11 termeni, obţinem: $\mathrm{E}(a,b,c)\ge 11\cdot\sqrt[11]{\left(\frac{1}{6}\right)^6\cdot\log^6{}_a b\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\log^6{}_b c\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\log^6{}_c a}\Leftrightarrow$ $\mathrm{E}(a,b,c)\ge 11\cdot\sqrt[11]{\left(\frac{1}{6}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}\Leftrightarrow$ $\mathrm{E}(a,b,c)\ge 11\cdot\sqrt[11]{\frac{1}{2^8\cdot 3^9}}\Rightarrow \min\mathrm{E}(a,b,c)=\frac{11}{\sqrt[11]{2^8\cdot 3^9}}.$	2p
	Egalitatea are loc pentru termeni egali $\Rightarrow$ $\frac{1}{6}\cdot\log_a b=\frac{1}{3}\cdot\log^2{}_b c=\frac{1}{2}\cdot\log^3{}_c a=k,\ k>0.$ $\Rightarrow b=a^{6k};c=b^{\sqrt{3k}};a=c^{\sqrt[3]{2k}}.$	1p
	Prin înlocuire, se obţine: $a=b^{\sqrt{3k}\cdot\sqrt[3]{2k}}=a^{6k\cdot\sqrt{3k}\cdot\sqrt[3]{2k}}\Rightarrow k^{\frac{11}{6}}=\frac{1}{6\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}\Rightarrow k=\frac{1}{\sqrt[11]{2^8\cdot 3^9}}.$	1p
	Tripletele (a,b,c) sunt de forma $\left(a,\ a^{\sqrt[11]{3^2\cdot 2^3}},\ a^{\sqrt[11]{\frac{3^3}{2}}}\right),$ $a\in(0,1)$ sau $a\in(1,\infty).$	1p