OLIMPIADA NATIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a X-a
24 Februarie 2017

BAREM

Problema 1.

Din $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3| = |z_1|$ prin împărțirea cu $|z_2 + z_3| \neq 0$ se obține :

$\left|\frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1\right| = 1 = \left|\frac{z_1}{z_2 + z_3}\right|$ 2p

Notăm $a + bi = \frac{z_1}{z_2 + z_3}$ și din condițiile de mai sus se obține sistemul $\begin{cases} (a+1)^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$ 2p

Se obține $a = \frac{-1}{2}$, $b = \frac{\pm i\sqrt{3}}{2}$ deci $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ 3p

Problema 2.

a) f este bijectivă $\Leftrightarrow (\forall) y \in Z$ $(\exists!) z \in Z$ astfel încât $f(z) = y$ 1p

Se deduce că $(\forall) y = m + ni \in Z$ $(\exists!) z = m + \frac{n}{7} i \in Z$ astfel încât $f(z) = y$ 1p

Se deduce din $z = m + \frac{n}{7} i = \frac{7m + ni}{7} = \frac{4m + 3m + 4ni - 3ni}{7} = \frac{4y + 3\overline{y}}{7}$ că $f^{-1}(z) = \frac{4z + 3\overline{z}}{7}$ 2p

b) Se determină $f_2(z) = 25z - 24\overline{z}$, $f_3(z) = 172z - 171\overline{z}$ 1p

Demonstrează că $f_n(z) = \frac{7^n + 1}{2} z - \frac{7^n - 1}{2} \overline{z}$ 2p

Problema 3.

Se consideră în planul complex punctele $A(3i) \in Oy$, $B(4) \in Ox$, $M(z)$ 2p

Din relația $|z - 3i| + |z - 4| = 5$ obținem că AM+MB=AB adică M $\in$ AB 2p

Cerința problemei de a determina valoarea minimă a modulului numărului complex z este echivalentă cu condiția de a determina distanța minimă de la punctul M $\in$ AB la punctul O 1p

Distanța minimă OM se obține atunci când OM este înălțime în triunghiul OAB, deci valoarea minimă pentru $|z|$ este $\frac{12}{5}$ 2p

Problema 4.

Se schimbă baza logaritmilor din inegalitatea cerută (de exemplu se alege baza e).....................1p

Se notează $\ln x = a,\ \ln y = b,\ \ln z = c$, unde $a, b, c > 1$ și inegalitatea devine

$$\frac{a}{nc+b}+\frac{b}{na+c}+\frac{c}{nb+a}\geq\frac{3}{n+1}$$ 1p

adică $\frac{a^2}{a(nc+b)}+\frac{b^2}{b(na+c)}+\frac{c^2}{c(nb+a)}\geq\frac{3}{n+1}$ 1p

Se demonstrează pe baza inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz că

$$\frac{a^2}{a(nc+b)}+\frac{b^2}{b(na+c)}+\frac{c^2}{c(nb+a)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{(n+1)(ab+ac+bc)}$$ 2p

și că $\frac{(a+b+c)^2}{(n+1)(ab+ac+bc)}\geq\frac{3}{n+1}$ de unde rezultă că inegalitatea e demonstrată.........................2p