Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, judeţul Timiş, 24.II.2017
clasa a XII-a

Soluții

1. *Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție $*$ prin*

$$x * y = 3xy - 3x - 3y + 4, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătați că legea de compoziție $*$ este comutativă, asociativă și admite element neutru.

b) Să se calculeze $(-2017) * (-2016) * \cdots * 2016 * 2017$.

c) Calculați $\underbrace{x * x * x * \cdots * x}_{n\ elemente}$.

***

Soluție:

a) $x * y = 3(x-1)(y-1) + 1$
$e = \dfrac{4}{3}$.

b) $x * 1 = 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1$ este element absorbant $\Rightarrow$
$\Rightarrow (-2017) * (-2016) * \cdots * (2017) = 1$.

c) $x * x * \cdots * x = 3^{n-1}(x-1)^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

2. *Fie $(G, \cdot)$ un grup. Arătați că funcţia*

$$f : G \to G, \quad f(x) = x^{-1}, \forall x \in G,$$

este un automorfism al grupului $(G, \cdot)$ dacă şi numai dacă grupul $(G, \cdot)$ este abelian.

***

Soluție:

Fie e elementul neutru al grupului.

Presupunem că f e automorfism al grupului G. Atunci:
$f(xy) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in G$.
$f(xy) = (xy)^{-1}$ iar
$f(x) \cdot f(y) = x^{-1}y^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}, \forall x, y \in G \Rightarrow$
$y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} \,|x \Rightarrow y^{-1} = x^{-1}y^{-1}x \,|y \Rightarrow$
$\Rightarrow e = x^{-1}y^{-1}xy \Rightarrow x = y^{-1}xy \Rightarrow yx = xy$.

3. *Calculați:*

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx, \quad x>0.$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\cos x)(3+\cos x)}dx, \quad x\in(0,\pi).$

*****

Soluție:

a) $$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx =$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)' dx$$
$$\overset{x-\frac{1}{x}=t}{=} \int \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt =$$
$$= \ln\left(t+\sqrt{t^2+2}\right)+\mathcal{C} =$$
$$= \ln\left(x-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\right)+\mathcal{C}.$$

b) $\tan\frac{x}{2}=t \Rightarrow$
$$\Rightarrow \int \frac{t^2+1}{(t^2+2)(t^2+3)}dt =$$
$$= \int \frac{2(t^2+2)-(t^2+3)}{(t^2+3)(t^2+2)}dt =$$
$$= 2\int \frac{1}{t^2+3}dt - \int \frac{1}{t^2+2}dt =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+\mathcal{C} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+\mathcal{C}.$$

4. *Fie $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ o funcție care admite primitive. Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ definită prin*
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & , x<0 \\ 2f(x) & , x\geq 0\end{cases}$$
nu are primitive.

G.M.

Soluție:

Presupunem că g are primitive. Cum f nu se anulează și are primitive, rezultă că $\frac{g}{f}$ are proprietatea lui Darboux. (Teorema Jarnik)

Dar $\frac{g}{f}(x)=\begin{cases}1, \ x<0\\ 2, \ x\geq 0\end{cases}$, deci $\frac{g}{f}$ nu are proprietatea lui Darboux, absurd.

Barem de corectare

1. a) $x * y = 3(x-1)(y-1)+1$

.............2p

$e = \dfrac{4}{3}.$

.............1p

b) $x * 1 = 1$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1$ este element absorbant

.............1p

$\Rightarrow (-2017) * (-2016) * \cdots * (2017) = 1.$

.............1p

c) $x * x * \cdots * x = 3^{n-1}(x-1)^n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

.............1p

Demonstrarea formulei prin inducție

.............1p

2. Fie e elementul neutru al grupului.

Presupunem că f e automorfism al grupului G. Atunci:
$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in G$.

.............1p

$f(xy) = (xy)^{-1}$

.............1p

$f(x) \cdot f(y) = x^{-1}y^{-1} \Rightarrow$

.............1p

$\Rightarrow (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$, $\forall x, y \in G \Rightarrow$

.............1p

$y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} \,|x \Rightarrow y^{-1} = x^{-1}y^{-1}x \,|y \Rightarrow$

.............1p

$\Rightarrow e = x^{-1}y^{-1}xy \Rightarrow x = y^{-1}xy \Rightarrow yx = xy.$

.............2p

3. a) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx =$

.............1p

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)' dx$$

............1p

$$\overset{x - \frac{1}{x} = t}{=} \int \frac{1}{\sqrt{t^2+2}} dt =$$
$$= \ln\left(t + \sqrt{t^2+2}\right) + \mathcal{C} =$$

............1p

$$= \ln\left(x - \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}\right) + \mathcal{C}.$$

............1p

b) $\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{t^2+1}{(t^2+2)(t^2+3)} dt =$$

............1p

$$= \int \frac{2(t^2+2) - (t^2+3)}{(t^2+3)(t^2+2)} dt = 2\int \frac{1}{t^2+3} dt - \int \frac{1}{t^2+2} dt =$$

............1p

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + \mathcal{C} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + \mathcal{C}.$$

............1p

4. Presupunem că g are primitive. Cum f nu se anulează și are primitive, rezultă că $\frac{g}{f}$ are proprietatea lui Darboux. (Teorema Jarnik)

............3p

Dar $\frac{g}{f}(x) = \begin{cases} 1, \ x < 0 \\ 2, \ x \geq 0 \end{cases}$,

............3p

deci $\frac{g}{f}$ nu are proprietatea lui Darboux, absurd.

............1p