Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, judeţul Timiş, 24.II.2017
clasa a IX-a

Barem de corectare

1. *Determinaţi numerele reale x, pentru care* $\left[\dfrac{x^2+1}{x}\right]+\left[\dfrac{x}{x^2+1}\right]=3.$

supliment GM, martie 2016

Soluție. Dacă $x<0 \Rightarrow \left[\dfrac{x^2+1}{x}\right]+\left[\dfrac{x}{x^2+1}\right]<0$ 2p

Fie $x>0$.

Deoarece $0 \leq \dfrac{x}{x^2+1}<1 \Rightarrow \left[\dfrac{x}{x^2+1}\right]=0$ 1p

Ecuația devine $\left[\dfrac{x^2+1}{x}\right]=3$ .... 1p.

$3 \leq \dfrac{x^2+1}{x}<4$ 1p

$x \in \left(2-\sqrt{3}, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, 2+\sqrt{3}\right)$ 2p

□

2. *Fie $x,y,z>0$ astfel încât $x+y+z=2017$. Arătaţi că are loc inegalitatea*

$$\sqrt{2017x+yz}+\sqrt{2017y+zx}+\sqrt{2017z+xy} \leq 4034.$$

*****

Demonstraţie. $2017x+yz=(x+y+z)x+yz=x^2+xy+xz+yz=(x+y)(x+z)$. 3p

$\sqrt{2017x+yz}=\sqrt{(x+y)(x+z)} \leq \dfrac{2x+y+z}{2}$ 2p

$\sqrt{2017x+yz}+\sqrt{2017y+zx}+\sqrt{2017z+xy} \leq \dfrac{2x+y+z}{2}+\dfrac{x+2y+z}{2}+\dfrac{x+y+2z}{2}=$
$2(x+y+z)=4034$ 2p

□

3. *a) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu termeni nenuli. Să se arate că*

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_n}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}, \forall n \geq 2.$$

b) Fie şirul de numere reale nenule $(a_n)_{n\geq 1}$, astfel încât $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{a_{k-1}a_k}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}, \forall n \geq 2$. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

*****

Soluție. a) Fie r rația progresiei aritmetice, atunci:
$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{r}\cdot\frac{a_n-a_1}{a_1a_n}=$
$\frac{n-1}{a_1a_n}$ 3p

b) Pentru $n=3$ obținem $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$ 1p

Notăm $r=a_2-a_1$.

Din $\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}\Rightarrow\frac{n-1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_1a_{n+1}}\Rightarrow(n-1)a_{n+1}+a_1=na_n$ ... 1p

Presupunem că $a_k=a_1+(k-1)r,(\forall)k\le n$ și demonstrăm că $a_{n+1}=a_1+nr$.

Din $(n-1)a_{n+1}+a_1=na_n\Rightarrow a_{n+1}=a_1+nr$ 2p

$\square$

4. *În patrulaterul $ABCD$, fie O intersecția diagonalelor, iar M,P,Q pe $(BD),(AB)$ respectiv (DC), astfel încât $\frac{BM}{MD}=4$, $\frac{AP}{PB}=3$, $\frac{DQ}{QC}=\frac{5}{3}$. Notăm $\frac{OD}{OB}=k$ şi $\frac{OC}{OA}=p$.*

a) Să se arate că $\overrightarrow{OQ}=\frac{5p}{8(p+1)}\overrightarrow{AC}+\frac{3k}{8(k+1)}\overrightarrow{BD}$.

b) Dacă vectorii $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{OQ}$ şi $\overrightarrow{CP}$ sunt coliniari, arătaţi că $ABCD$ este paralelogram.

supliment GM, ianuarie 2016

Soluţie. a) Din $\frac{DQ}{QC}=\frac{5}{3}\Rightarrow\overrightarrow{OQ}=\frac{3\overrightarrow{OD}+5\overrightarrow{OC}}{8}$ 1p

Dar $\overrightarrow{OD}=\frac{k}{k+1}\overrightarrow{BD}$, iar $\overrightarrow{OC}=\frac{p}{p+1}\overrightarrow{AC}$........................ 1p

Obţinem $\overrightarrow{OQ}=\frac{5p}{8(p+1)}\overrightarrow{AC}+\frac{3k}{8(k+1)}\overrightarrow{BD}$ 1p

b) Considerăm baza $\{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\}$ şi obţinem:

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{p+1}\overrightarrow{AC}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{BD}$,

$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{p+1}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{k+1}\overrightarrow{BD}$,

$\overrightarrow{CB}=-\frac{p}{p+1}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{k+1}\overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{p+1}\overrightarrow{AC}+\frac{4k-1}{5(k+1)}\overrightarrow{BD}$ 1p

$\overrightarrow{CP}=\frac{-4p-1}{4(p+1)}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4(k+1)}\overrightarrow{BD}$........................ 1p

Deoarece vectorii sunt coliniari obţinem: $p=\frac{3k}{4k-1}$ şi $4p+1=\frac{15}{4k-1}\Rightarrow p=k=1$. 1p

Concluzie $ABCD$ este paralelogram. 1p

$\square$