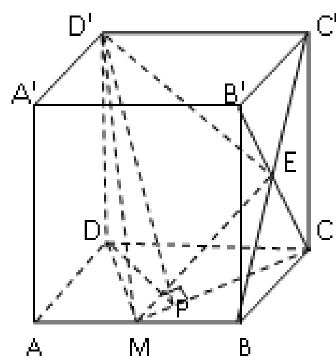
MINISTERUL EDUCAŢIEI NATIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI TIMIŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – FILIALA TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală – 24 februarie 2017

CLASA A VIII-A
SOLUŢII ŞI BAREM

1.	***Se consideră numerele reale pozitive a,b,c,d astfel încât abcd = 1. Calculaţi :*** $\boldsymbol{E=\frac{2017+a}{1+a+ab+abc}+\frac{2017+b}{1+b+bc+bcd}+\frac{2017+c}{1+c+cd+cda}+\frac{2017+d}{1+d+da+dab}}$	
	Amplificăm a doua fracţie cu a, a treia cu ab, a patra cu abc și se ţine cont la numitori că abcd=1	1p
	E=$\frac{2017+a}{1+a+ab+abc}+\frac{a(2017+b)}{1+a+ab+abc}+\frac{ab(2017+c)}{1+a+ab+abc}+\frac{abc(2017+d)}{1+a+ab+abc}$	2p
	E = $\frac{1}{1+a+ab+abc}$ [2017 (1+a+ab+abc) +1+a+ab+abc]	2p
	E= $\frac{2018(1+a+ab+abc)}{1+a+ab+abc}$	1p
	E= 2018	1p
2.	***a) Fie numerele reale x,y,z pentru care sunt adevărate relaţiile x=$\sqrt{1-2yz}$, y=$\sqrt{1-2xz}$ și z= $\sqrt{1-2yx}$. Calculaţi x+y+z.*** ***b) Rezolvaţi ecuaţia $\left[\frac{x+2}{3}\right]$ =$\lvert x+1\rvert$ – 1, unde $[a]$ este partea întreagă a lui a, iar $\lvert a\rvert$ este modulul lui a.*** ***G.M.***	
a)	Din enunţ, avem $x^2 = 1- 2yz$, $y^2 = 1-2xz$, $z^2 = 1- 2yx$	1p
	Pe de altă parte $(x + y +z)^2 = x^2+y^2+z^2+ 2xy +2xz+2yz$ și înlocuind pe x^2, y^2, z^2, obţinem $(x + y +z)^2 = 3$	1p
	Avem x+y+z =$\pm\sqrt{3}$, iar din enunţ (definirea radicalilor) x≥0, y≥0, z≥0 Prin urmare x+y+z = $\sqrt{3}$	1p
b)	Cum $\left[\frac{x+2}{3}\right]$ este un număr întreg, deducem că$\lvert x+1\rvert$– 1 = k, unde k este număr întreg. Obţinem x= k sau x = $-k-2$	1p
	Pentru x = k ecuaţia devine $\left[\frac{k+2}{3}\right]$ = k, echivalentă cu k≤ $\frac{k+2}{3}$ <k+1, de unde obţinem k∈ {0,1}, adică x ∈ {0,1}.	1p
	Pentru x = $-k-2$ecuaţia devine $\left[\frac{-k}{3}\right]$ = k, echivalentă cu k≤ $\frac{-k}{3}$ <k+1, de unde obţinem k = 0, adică x = -2.	1p
	Așadar x ∈ {-2,0,1}.	1p

3.	***Se consideră triunghiul ABC și punctul D-mijlocul lui [BC].Dacă [DM și [DN sunt respectiv, bisectoarele ∢ADB și ∢ADC (M∈[AB], N∈[AC]),iar punctul P este exterior planului (ABC), să se arate că BC‖(PMN).***	
	Din teorema bisectoarei aplicată în triunghiul ADB $\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AD}{DB}$	2p
	Din teorema bisectoarei aplicată în triunghiul ADC $\Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{AD}{DC}$	2p
	Cum DB = DC $\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$	1p
	Conform teoremei reciproce a lui Thales ⇒ MN‖BC	1p
	Cum MN ⊂ (PMN) ⇒ BC ‖(PMN)	1p
4.	***Fie M mijlocul muchiei [AB] a cubului ABCDA\`B\`C\`D\` și [BC\`]∩[B\`C] = {E}.*** ***a)Demonstraţi că D\`E ⊥(MEC).***   ***b)Calculaţi tangenta unghiului format de planele (ABC) și (D\`CM).***	
a)	$\begin{cases} D'C' \perp (BCC') \\ C'E \perp EC \\ C'E, EC \subset (BCC') \end{cases} \Rightarrow D'E \perp EC$ (1) (din T3⊥) 	1p
	Se arată prin calcul că $D'M^2 = \frac{9a^2}{4}$, $D'E^2 = \frac{6a^2}{4}$, $EM^2 = \frac{3a^2}{4}$ (a este lungimea muchiei cubului)	1p
	Conform reciprocei teoremei lui Pitagora $D'M^2 = D'E^2 + EM^2 \Rightarrow m(∢D'EM) = 90°$, adică D'E ⊥ME (2)	1p
	Din (1) și (2) deducem că D'E ⊥ (MEC)	1p
b)	Construim DP⊥ MC, P ∈ MC.Cu teorema celor trei perpendiculare , rezultă $D'P \perp MC$ Deducem că măsura unghiului cerut este egală cu măsura unghiului ∢ D'PD	1p
	Exprimă aria triunghiului DMC în două moduri și determină DP $= \frac{2a}{\sqrt{5}}$	1p
	Calculează tg(∢ D'PD) $= \frac{DD'}{DP} \Rightarrow$ tg(∢ D'PD) $= \frac{\sqrt{5}}{2}$	1p