

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a X-a
24 Februarie 2017

Problema 1.

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $z_2 + z_3 \neq 0$ și $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3| = |z_1|$. Determinați $\frac{z_1}{z_2 + z_3}$.

Problema 2.

Fie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 4z - 3\bar{z}$.

a) Demonstrați că funcția f este bijectivă și determinați inversa ei.

b) Determinați funcția $f_n = \underbrace{fofo\dots of}_{\text{de } n \text{ ori } f}$.

supliment GM, ianuarie 2016 (prelucrare)

Problema 3.

Să se determine valoarea minimă a modulului unui număr complex z pentru care are loc relația $|z - 3i| + |z - 4| = 5$.

Problema 4.

Demonstrați că dacă $n \in \mathbb{N}^*$ și $x, y, z \in (1, \infty)$ atunci $\log_{x^n z} y + \log_{y^n x} z + \log_{z^n y} x \geq \frac{3}{n+1}$

NOTĂ : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.