Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş　　　　Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, judeţul Timiş, 24.II.2017
clasa a XI-a

1. Fie $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

   i) Calculați $det\,(A(x))$;

   ii) Aflați x astfel ca $det\,(A(x)) = 182$;

   iii) Determinați $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $A(4) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

G.M.

2. a) Fie $A = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{2} & \frac{a-1}{2} \\ \frac{a-1}{2} & \frac{a+1}{2} \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se calculeze A^n.

   b) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Arătați că pentru orice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ are loc echivalenţa

$$XA = AX \Longleftrightarrow XA^3 = A^3X.$$

***

3. a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde $a_n = n \cdot \left(\sqrt{\ln \frac{ne}{n+1}} - 1\right)$.

   b) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir strict crescător și $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)(a_{n+1} - a_n) = 2$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

***

4. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale, cu $x_1 > 0$ şi $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \ln x_{n+1}$.

   Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$

***

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte
Timp de lucru 3 ore.