

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, județul Timiș, 24.II.2017
clasa a XII-a

1. Definim pe \mathbb{R} legea de compoziție $*$ prin

$$x * y = 3xy - 3x - 3y + 4, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Arătați că legea de compoziție $*$ este comutativă, asociativă și admite element neutru.
b) Să se calculeze $(-2017) * (-2016) * \dots * 2016 * 2017$.
c) Calculați $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{n \text{ elemente}}$.

2. Fie (G, \cdot) un grup. Arătați că funcția

$$f : G \rightarrow G, \quad f(x) = x^{-1}, \quad \forall x \in G,$$

este un automorfism al grupului (G, \cdot) dacă și numai dacă grupul (G, \cdot) este abelian.

3. Calculați:

- a) $\int \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x^4 + 1}} dx, \quad x > 0.$
b) $\int \frac{1}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)} dx, \quad x \in (0, \pi).$

4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ o funcție care admite primitive. Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x < 0 \\ 2f(x) & , x \geq 0 \end{cases}$$

nu are primitive.

G.M.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte
Timp de lucru 3 ore.