MINISTERUL EDUCAŢIEI NATIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI TIMIŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – FILIALA TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală – 24 februarie 2017

CLASA A VI-A
SOLUŢII ŞI BAREM

1.	***a) Câte fracții ireductibile se regăsesc în șirul următor:*** $\frac{2}{2015}, \frac{3}{2014}, \frac{4}{2013}, \frac{5}{2012}, \dots, \frac{2015}{2}$? ***b) Fie a și b numere naturale nenule astfel încât*** $$\frac{a}{b} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \dots + \frac{1}{2003\cdot 2004}$$ ***Arătați că 1669 divide a.*** ***G. M.***	
	a) Fie d un divizor comun al numărătorului și numitorului uneia din fracțiile din șir $\Rightarrow d < 2015$ și d divide suma lor	1p
	2 + 2015 = 3 + 2014 = ... = 2015 + 2 = 2017	1p
	Observă că 2017 este număr prim ⇒ d = 1	1p
	Toate cele 2014 fracții din șir sunt ireductibile	1p
	b) $\frac{a}{b} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2003} - \frac{1}{2004}$	1p
	$\frac{a}{b} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2004} = \frac{1669}{2004}$	1p
	Observă că 1669 este număr prim ⟹ 1669/a	1p
2.	***Trei numere prime se numesc „speciale" dacă produsul lor este de 5 ori mai mare decât suma lor. Câte triplete de numere prime pot fi „speciale"?***	
	Fie a, b, c – numere prime astfel încât a·b·c = 5·(a + b + c) 5 divide a·b·c ⟹ unul din numere este 5	1p
	Fie c = 5 ⟹ a·b = a + b + 5 ⟹ a · (b – 1) = b + 5	1p
	a = $\frac{b+5}{b-1} = 1 + \frac{6}{b-1} \in \mathbb{N}$	1p
	b – 1 este un divizor al lui 6 ⟹ $b \in \{2,3,4,7\}$	1p
	b = 4 nu este prim pentru b = 3, a = 4 nu e prim	1p

	Pentru b = 2, a = 7 Pentru b = 7, a = 2	1p
	{a, b, c}= {2,5,7} ; 6 soluții	1p
	Observaţie: Pentru aflarea soluţiei fără demonstraţie se acordă 1 punct	
3.	***Se consideră numerele naturale a = 6n + 5, b = 4n + 3 și c = 2n + 2. Arătați că [a, b] + [a, c] este pătrat perfect, unde prin [x, y] se înțelege cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y.***	
	Fie d un divizor comun al lui a și b d | 6n + 5 și d | 4n + 3 d | 2 (6n + 5) și d | 3 (4n + 3), adică d | 12n + 10, d | 12n + 9	1p
	d | 12n + 10 – 12n – 9 ⟹ d | 1 ⟹ d = 1	1p
	Fie d' un divizor comun al lui a și c d' | 2n + 2 și d' | 6n + 5 ⟹ d' | 3· (2n + 2)	1p
	d' | 6n + 6 – 6n – 5 ⟹ d' | 1 ⟹ d' = 1	1p
	[a, b] = a · b și [a, c] = a · c	1p
	a = b + c	1p
	$[a, b] + [a, c] = a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c) = a \cdot a = a^2$	1p
4.	***Se consideră unghiurile drepte ∡ AOB și ∡ COD, astfel încât C ∈ Int (∡ AOB), B ∈ Int (∡ COD) și [OE este semidreapta opusă lui [OA.*** ***a) Demonstrați că unghiul format de bisectoarele unghiurilor ∡ AOC și ∡ BOD este un unghi drept.*** ***b) Dacă 7 · m (∡ AOC) = 5 · m (∡ DOE) aflați măsura ∡ COB.***	
	a) $∡AOC \equiv ∡BOD$ (complemente ale $∡BOC$)	1p
	Fie [OM – bisectoarea $∡AOC$ și [ON – bisectoarea $∡BOD$ $∡AOM \equiv ∡MOC \equiv ∡BON \equiv ∡NOD$	1p
	m ($∡MON$) = m ($∡MOC$) + m ($∡COB$) + m ($∡BON$) = m ($∡AOB$) = 90°	1p
	b) m ($∡AOC$) + m ($∡DOE$) = 90°	1p
	5 m ($∡AOC$) + 5 m ($∡DOE$) = 450° 5 m ($∡AOC$) + 7 m ($∡AOC$) = 450°	1p
	m ($∡AOC$) = 450°:12 = 37°30'	1p
	m ($∡BOC$) = 90° - m ($∡AOC$) = 52°30'	1p