Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, judeţul Timiş, 24.II.2017
clasa a XI-a

Soluții:

1. a) Fie $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Calculați $det\,(A(x))$;

ii) Aflați x astfel ca $det\,(A(x)) = 182$;

iii) Determinați $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $A(4) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soluție:

i) $det\,(A(x)) = x^2 - 5x + 6$

ii) $(x-2)(x-3) = 182 \Rightarrow x_1 = 16$, $x_2 = -11$.

iii) $A^{-1}(4) = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ -8 & 6 & -1 \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ -9 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Arătați că $XA = AX \Leftrightarrow XA^3 = A^3X$, unde $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Soluție:

" $\Rightarrow$ "

Dacă $XA = AX \Rightarrow A^3X = A^2 \cdot AX = A^2 \cdot XA = A \cdot AX \cdot A = AXA^2 = XA \cdot A^2 = XA^3$.

" $\Leftarrow$ "

Prin calcul direct sau folosind ecuația caracteristică avem:

$A = \frac{1}{3}A^3 - \frac{4}{3}I_3$.

$AX = \left(\frac{1}{3}A^3 - \frac{4}{3}I_3\right)X = \frac{1}{3}A^3X - \frac{4}{3}X = \frac{1}{3}XA^3 - \frac{4}{3}X = X\left(\frac{1}{3}A^3 - \frac{4}{3}I_3\right) = XA$

2. a) $A^n = \begin{pmatrix} \frac{a^n+1}{2} & \frac{a^n-1}{2} \\ \frac{a^n-1}{2} & \frac{a^n+1}{2} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$ - inducție matematică

b) Avem $det(A) = a \Rightarrow det(A^k) = a^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} det(A^k) = \sum_{k=1}^{n} a^k = S$.

Pe de altă parte: $\sum_{k=1}^{n} A^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k+1}{2} & \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k-1}{2} \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k-1}{2} & \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S+n}{2} & \frac{S-n}{2} \\ \frac{S-n}{2} & \frac{S+n}{2} \end{pmatrix}$.

Atunci $det\left(\sum_{k=1}^{n} A^k\right) = nS.$

Avem de calculat: $\lim_{n\to\infty} \frac{S}{nS} = 0.$

3. a) Calculați $\lim_{n\to\infty} a_n$, unde $a_n = n \cdot \left(\sqrt{\ln \frac{ne}{n+1}} - 1\right)$.

Soluție: $a_n = \frac{\left(1+\ln\frac{ne}{ne+e}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\ln\frac{ne}{ne+e}} \cdot \frac{\ln\left(1-\frac{e}{ne+e}\right)}{-\frac{e}{ne+e}} \cdot \frac{-ne}{ne+e}.$

Folosind limitele remarcabile:

$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+a_n)^r - 1}{a_n} = r$, pentru $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

și

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$, pentru $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

deducem că $\lim_{n\to\infty} = -\frac{1}{2}$

b) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir strict crescător și $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar $\lim_{n\to\infty}(2n+1)(a_{n+1} - a_n) = 2$. Calculați $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Soluție:

Din ipoteză avem $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}-a_n}{\frac{1}{n+1}}\right] = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_{n+1}-a_n}{\frac{1}{n+1}}\right] = 1$

Fie $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ șirul armonic cu $\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$.

Deducem că $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{H_{n+1}-H_n} = 1.$

Din Teorema Stolz-Cesaro rezultă: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{H_n} = 1$, deci $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

4. Din modul de definire $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$

Cum $1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = \ln x_n$

$1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \ln x_{n+1}$

$\Rightarrow x_n = \ln x_{n+1} - \ln x_n \Rightarrow x_n = \ln\frac{x_{n+1}}{x_n} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{x_n} > 1 \Rightarrow (x_n)$ e strict crescător.

Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ mărginit, atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent și $\lim_{n\to\infty} x_n = e$, $e > 0$.

Trecând la limită în relația $\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{x_n}$ obținem $1 = e^e$ contradicție, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ crescător și nemărginit, deci $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}} = (e)^{\frac{1}{x_n}} = e$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}} = e.$$

Barem de corectare

1. a) i) $det\,(A(x)) = x^2 - 5x + 6$

................................1p

ii) $(x-2)(x-3) = 182 \Rightarrow x_1 = 16,\ x_2 = -11.$

................................1p

iii) $A^{-1}(4) = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ -8 & 6 & -1 \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

................................1p

$X = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ -9 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$

................................1p

b) " $\Rightarrow$ "
Dacă $XA = AX \Rightarrow A^3X = A^2 \cdot AX = A^2 \cdot XA = A \cdot AX \cdot A = AXA^2 = XA \cdot A^2 = XA^3.$

................................1p

" $\Leftarrow$ "
Prin calcul direct sau folosind ecuația caracteristică avem:
$A = \frac{1}{3}A^3 - \frac{4}{3}I_3.$

................................1p

$AX = \left(\frac{1}{3}A^3 - \frac{4}{3}I_3\right)X = \frac{1}{3}A^3X - \frac{4}{3}X = \frac{1}{3}XA^3 - \frac{4}{3}X = X\left(\frac{1}{3}A^3 - \frac{4}{3}I_3\right) = XA$

.....1p

2. a) $A^n = \begin{pmatrix} \frac{a^n+1}{2} & \frac{a^n-1}{2} \\ \frac{a^n-1}{2} & \frac{a^n+1}{2} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$ - inducție matematică
Verificare $P(1)$

................................1p

$P(k) \to P(k+1)$ și finalizare

................................2p

b) Avem $det(A) = a \Rightarrow det(A^k) = a^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} det(A^k) = \sum_{k=1}^{n} a^k = S.$

................................1p

Pe de altă parte: $\sum_{k=1}^{n} A^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k+1}{2} & \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k-1}{2} \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k-1}{2} & \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S+n}{2} & \frac{S-n}{2} \\ \frac{S-n}{2} & \frac{S+n}{2} \end{pmatrix}.$

................................1p

Atunci $det\left(\sum_{k=1}^{n} A^k\right) = nS$.

................................1p

Avem de calculat: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S}{nS} = 0$.

................................1p

3. a) $a_n = \dfrac{\left(1+\ln\dfrac{ne}{ne+e}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\ln\dfrac{ne}{ne+e}} \cdot \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{e}{ne+e}\right)}{-\dfrac{e}{ne+e}} \cdot \dfrac{-ne}{ne+e}$.

................................2p

Folosind limitele remarcabile:
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+a_n)^r - 1}{a_n} = r$, pentru $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
și
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$, pentru $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

................................1p

deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} = -\dfrac{1}{2}$

................................1p

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{2n+1}{n+1} \cdot \dfrac{a_{n+1}-a_n}{\dfrac{1}{n+1}}\right] = 2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{a_{n+1}-a_n}{\dfrac{1}{n+1}}\right] = 1$

................................1p

Fie $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ șirul armonic cu $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = \infty$.
Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{H_{n+1}-H_n} = 1$.

................................1p

Din Teorema Stolz-Cesaro rezultă: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{H_n} = 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

................................1p

4. Din modul de definire $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$
Cum $1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = \ln x_n$
$1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \ln x_{n+1}$
$\Rightarrow x_n = \ln x_{n+1} - \ln x_n \Rightarrow x_n = \ln\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \Rightarrow \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = e^{x_n} > 1 \Rightarrow (x_n)$ e strict crescător.

................................2p

Dacă $(x_n)_{n\geq1}$ mărginit, atunci $(x_n)_{n\geq1}$ convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$, $e > 0$.

................................1p

Trecând la limită în relația $\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{x_n}$ obținem $1 = e^e$ contradicție, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ crescător și nemărginit, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

.................................1p

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}} = (e)^{\frac{1}{x_n}} = e$$

.................................1p

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}} = e.$$

.................................1p