Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, judeţul Timiş, 24.II.2017
clasa a IX-a

1. Determinaţi numerele reale x, pentru care

$$\left[\frac{x^2+1}{x}\right]+\left[\frac{x}{x^2+1}\right]=3.$$

supliment GM, martie 2016

2. Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $x + y + z = 2017$. Arătaţi că are loc inegalitatea

$$\sqrt{2017x+yz}+\sqrt{2017y+zx}+\sqrt{2017z+xy}\leq 4034.$$

***

3. a) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu termeni nenuli. Să se arate că

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_n}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$$

b) Fie şirul de numere reale nenule $(a_n)_{n\geq 1}$, astfel încât

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\frac{n-1}{a_1a_n}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$$

Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

***

4. În patrulaterul $ABCD$, fie O intersecţia diagonalelor, iar $M\in(BD)$, $P\in(AB)$ respectiv $Q\in(DC)$, astfel încât $\frac{BM}{MD}=4$, $\frac{AP}{PB}=3$, $\frac{DQ}{QC}=\frac{5}{3}$. Notăm $\frac{OD}{OB}=k$ şi $\frac{OC}{OA}=p$.

a) Să se arate că $\overrightarrow{OQ}=\frac{5p}{8(p+1)}\overrightarrow{AC}+\frac{3k}{8(k+1)}\overrightarrow{BD}$.

b) Dacă vectorii $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OQ}$ şi $\overrightarrow{CP}$ sunt coliniari, arătaţi că $ABCD$ este paralelogram.

supliment GM, ianuarie 2016

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte
Timp de lucru 3 ore.