MINISTERUL EDUCAŢIEI NATIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI TIMIŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – FILIALA TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală – 24 februarie 2017

CLASA A VII-A
SOLUŢII ŞI BAREM

1.	***Să se arate că numărul*** $n = \frac{100}{99} - \frac{102}{101} + \frac{104}{103} - \frac{106}{105} + \cdots + \frac{216}{215} - \frac{218}{217}$ ***nu este natural.***	
	$(1\frac{1}{99} - 1\frac{1}{101}) + \left(1\frac{1}{103} - 1\frac{1}{105}\right) + \cdots + \left(1\frac{1}{215} - 1\frac{1}{217}\right) =$	1p
	$= \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) + \left(\frac{1}{103} - \frac{1}{105}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{215} - \frac{1}{217}\right) =$	1p
	$= \frac{2}{99 \cdot 101} + \frac{2}{103 \cdot 105} + \cdots + \frac{2}{215 \cdot 217} > 0$	1p
	$2\left(\frac{1}{99\cdot101} + \frac{1}{103\cdot105} + \cdots + \frac{1}{215\cdot217}\right) < 2 \cdot \left(\frac{1}{99\cdot101} + \frac{1}{99\cdot101} + \cdots + \frac{1}{99\cdot101}\right)$	1p
	Observă că sunt 30 termeni	1p
	$< 2\cdot\frac{30}{99\cdot101} < 1$	1p
	$0 < n < 1 \Longrightarrow n \notin \mathbb{N}$	1p
2.	***Arătaţi că:*** ***a)*** $\sqrt{\mathbf{13} + \sqrt{\mathbf{5} + \sqrt{\mathbf{18} - \sqrt{\mathbf{5}}}}} + \sqrt{\mathbf{31} + \sqrt{\mathbf{21} + \sqrt{\mathbf{11} + \sqrt{\mathbf{21}}}}} < 10.$ ***b) Determinaţi numerele naturale*** $\overline{xyz}$ ***cu proprietatea că*** $\sqrt{\overline{xyy}} + \sqrt{\overline{yyx}} = \overline{zz}$.	
	a) $\sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{18 - \sqrt{5}}}} < \sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{18 - \sqrt{4}}}}$	1p
	$\sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{11 + \sqrt{21}}}} < \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{11 + \sqrt{25}}}}$	1p
	Efectuează calculele şi obţine $\sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{18 - \sqrt{5}}}} < 4$; $\sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{11 + \sqrt{21}}}} < 6$	1p
	b) $\overline{zz} \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sqrt{\overline{xyy}}, \sqrt{\overline{yyx}} \in \mathbb{N}$ implică $\sqrt{\overline{xyy}}, \sqrt{\overline{yyx}}$ = pătrate perfecte	1p
	Ultimele 2 cifre ale unui pătrat perfect nu pot fi ambele impare ⟹ y = cifră pară.	1p
	Ultima cifră a unui pătrat perfect nu poate fi 2, 3, 7, 8 ⟹ $y \in \{4, 6\}$	1p
	Convine doar y = 4, x = 1, z = 3; $\overline{xyz} = 143$	1p
	Observaţie: Pentru aflarea soluţiei fără demonstraţie se acordă 1 punct	

3.	***Fie Δ ABC ascuțitunghic. Înălțimea [AD] și mediana [BE] formează un unghi de 60°. Arătați că AD = BE.*** ***G. M.***	
	Fie BE ∩ AD = {G} Δ BDG – dreptunghic în D, m ($\measuredangle BGD$) = 60°, m ($\measuredangle GBD$) = 30° ⇒ GD = $\frac{BG}{2}$	1p
	Fie F – mijlocul lui [AD] ⟹ EF – linie mijlocie în Δ ADC ⟹ EF ∥ BC	1p
	AD ⊥ BC ⟹ AD ⊥ FE ⟹ Δ EFG – dreptunghic în F m (∡ FGE) = m (∡ BGD) = 60°, m (∡ FEG) = 30°	1p
	FG = $\frac{GE}{2}$	1p
	FG + GD = $\frac{BG+GE}{2}$ = $\frac{BE}{2}$	1p
	AD = 2 · (FG + GD) = BE	1p
4.	***Arătați că într-un trapez cu diagonalele perpendiculare, suma lungimilor bazelor este mai mică decât suma lungimilor laturilor neparalele.*** ***R. M. T.***	
	Fie M, N – mijloacele laturilor neparalele [BC] și [AD] ⟹ OM, ON – mediane în Δ dreptunghice BOC, DOA	1p
	OM = $\frac{BC}{2}$, ON = $\frac{AD}{2}$	1p
	MN – linie mijlocie în trapez ⟹ MN = $\frac{AB+CD}{2}$	1p
	CAZ I O ∉ MN În Δ MON avem că MN < MO + ON	1p
	AB + CD = 2MN < 2 (OM + ON) = BC + AD	1p
	CAZ II O ∈ (MN) ⟹ OA = OC și OB = OD	1p
	⟹ ABCD – paralelogram; contradicție Egalitatea nu este posibilă în trapez	1p