CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
Suceava, 19 februarie 2017

Clasa a IX-a
profil tehnic, profil servicii şi resurse naturale şi protecţia mediului, profil real-specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE

1. Fie $a,b>0$ astfel încât $(ab)^{2017}+1=2b^{2017}$.

a) (2p) Arătați că $a^{2017}+\frac{1}{b^{2017}}=2$;

b) (2p) Arătați că $a\le b$;

c) (3p) Arătați că $\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\left(1+b^n\right)\ge 4$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Rezolvare:

a) $(ab)^{2017}+1=2b^{2017}\Rightarrow a^{2017}+\frac{1}{b^{2017}}=2.$

b)

$$1=\frac{a^{2017}+\frac{1}{b^{2017}}}{2}\ge\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{2017}}\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{2017}}\le 1.$$

Cum $a,b>0\Rightarrow a\le b.$

c) Din punctul b) avem $a\le b\Rightarrow a^n\le b^n,\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\left(1+b^n\right)\ge\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\left(1+a^n\right)=1+a^n+\frac{1}{a^n}+1\ge 2+2=4.$$

a) $(ab)^{2017}+1=2b^{2017}\Rightarrow a^{2017}+\frac{1}{b^{2017}}=2.$	2 puncte
b) $\frac{a^{2017}+\frac{1}{b^{2017}}}{2}\ge\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{2017}}$	1 punct
$\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{2017}}\le 1.$	1 punct
c) $a\le b\Rightarrow a^n\le b^n,\forall n\in\mathbb{N}^*$	1 punct
$\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\left(1+b^n\right)\ge\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\left(1+a^n\right)$	1 punct

$\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\left(1+a^n\right)=1+a^n+\frac{1}{a^n}+1\geq 2+2=4$	1 punct

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale nenule în progresie aritmetică .

a) (3p) Arătați că $\frac{1}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_n+a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\right),\forall n\in\mathbb{N}^*;$

b) (4p) Arătați că $\frac{1}{(a_1+a_2)\cdot(a_2+a_3)}+\frac{1}{(a_2+a_3)\cdot(a_3+a_4)}+\ldots+\frac{1}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}=$

$$=\frac{n}{(a_1+a_2)\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})},\forall n\geq 1.$$

Rezolvare:

a)

$a_n=a_1+(n-1)r$

$a_{n+1}=a_1+nr$

$a_{n+2}=a_1+(n+1)r$

$$\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_n+a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\right)=\frac{1}{2r}\cdot\frac{a_{n+1}+a_{n+2}-a_n-a_{n+1}}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}=$$

$$=\frac{1}{2r}\cdot\frac{a_1+(n+1)r-a_1-(n-1)r}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}=\frac{1}{2r}\cdot\frac{2r}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}$$

$$\frac{1}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_n+a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\right),\forall n\in\mathbb{N}^*;$$

b)

$$\frac{1}{(a_1+a_2)\cdot(a_2+a_3)}=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_2+a_3}\right)$$

$$\frac{1}{(a_2+a_3)\cdot(a_3+a_4)}=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_2+a_3}-\frac{1}{a_3+a_4}\right)$$

$$\frac{1}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_n+a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\right)$$

$$S=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_2+a_3}-\frac{1}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\right)=\frac{a_{n+1}+a_{n+2}-a_1-a_2}{2r\cdot(a_1+a_2)\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}=\frac{n}{(a_1+a_2)\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}$$

a) $a_n=a_1+(n-1)r$ $a_{n+1}=a_1+nr$ $a_{n+2}=a_1+(n+1)r$	1 punct

$\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_n+a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\right)=\frac{1}{2r}\cdot\frac{a_{n+1}+a_{n+2}-a_n-a_{n+1}}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}=$ $=\frac{1}{2r}\cdot\frac{a_1+(n+1)r-a_1-(n-1)r}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}=\frac{1}{2r}\cdot\frac{2r}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}$	2 puncte
b) $\frac{1}{(a_1+a_2)\cdot(a_2+a_3)}=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_2+a_3}\right)$ $\frac{1}{(a_2+a_3)\cdot(a_3+a_4)}=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_2+a_3}-\frac{1}{a_3+a_4}\right)$	2 puncte
$S=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_2+a_3}-\frac{1}{a_3+a_4}+...+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\right)=$ $=\frac{1}{2r}\cdot\left(\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_{n+1}+a_{n+2}}\right)=\frac{a_{n+1}+a_{n+2}-a_1-a_2}{2r\cdot(a_1+a_2)\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}=\frac{n}{(a_1+a_2)\cdot(a_{n+1}+a_{n+2})}$	2 puncte

3. Stabiliți, justificând răspunsul, care din următoarele propoziții sunt adevărate .

a) (3p) $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ se divide cu 19, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

b) (2p) $1+3+5+...+(2n-1)$ este pătrat perfect , $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

c) (2p) Un poligon convex cu n laturi are $\frac{n(n-2)}{2}$ diagonale , $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 4$.

Rezolvare:

a) propoziție adevărată, justificarea prin metoda inducției matematice

b) propoziție adevărată $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

Justificarea prin metoda inducției matematice sau suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice cu rația 2.

c) propoziția este falsă, este suficient să considerăm n=4, un patrulater convex are 2 diagonale , nu 4.

a) propoziție adevărată	1 punct
justificarea prin metoda inducției matematice	2 puncte
b) $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$	1 punct
justificarea	1 punct
c) propoziția este falsă	1 punct
Un contraexemplu	1 punct

4. Fie ΔABC cu G centrul de greutate și N simetricul punctului G față de mijlocul M al lui $[BC]$.

a) (3p) Arătaţi că $\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}$;

b) (4p) Determinați numerele reale nenule a,b,c pentru care $a\overrightarrow{NA}+b\overrightarrow{NB}+c\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

Rezolvare:

a) $BM=MC, GM=MN \Rightarrow BNCG$ paralelogram, de unde obținem $\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}$;

b) $\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NG}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{NA}=2\left(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right)\Rightarrow 2a\left(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right)+b\overrightarrow{NB}+c\overrightarrow{NC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NB}(2a+b)+\overrightarrow{NC}(2a+c)=\vec{0}$$

cum $\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NC}$ vectorii sunt vectori necoliniari $\Rightarrow \begin{cases}2a+b=0\\2a+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-2a\\c=-2a\end{cases}, a\in\mathbb{R}^*$

a) $BM=MC, GM=MN \Rightarrow BNCG$ paralelogram	2 puncte
$\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}$;	1 punct
b) $\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NG}$ $\Rightarrow \overrightarrow{NA}=2\left(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right)\Rightarrow 2a\left(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right)+b\overrightarrow{NB}+c\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{NB}(2a+b)+\overrightarrow{NC}(2a+c)=\vec{0}$	2 puncte
cum $\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NC}$ vectorii sunt vectori necoliniari $\Rightarrow \begin{cases}2a+b=0\\2a+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-2a\\c=-2a\end{cases}, a\in\mathbb{R}^*$	2 puncte