

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VII-a

1. a) (4p) Dacă $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$ și $xy + xz + yz = 2017$, arătați că

$$\sqrt{(x^2 + 2017)(y^2 + 2017)(z^2 + 2017)} \in \mathbb{Q}.$$

Prof. Gabriela Sascău

b) (3p) Determinați numerele de forma $\overline{ab17}$, scrise în baza 10, $b < a$, știind că numărul

$$n = \sqrt{1, a(b7) + 1, b(7a) + 1, 7(ab)} \in \mathbb{N}.$$

Prof. Gheorghe Iacoviță

Soluție: a) $x^2 + 2017 = x^2 + xy + xz + yz = x(x + y) + z(x + y) = (x + y)(x + z)$

Analog, $y^2 + 2017 = (x + y)(y + z)$ și $z^2 + 2017 = (x + z)(y + z)$.

$$\sqrt{(x^2 + 2017)(y^2 + 2017)(z^2 + 2017)} = \sqrt{(x + y)^2(y + z)^2(x + z)^2} = (x + y)(y + z)(x + z) \in \mathbb{Q}$$

b) Numărul n se mai poate scrie:

$$n = \sqrt{3 + \frac{\overline{ab7} - a + \overline{b7a} - b + \overline{7ab} - 7}{990}} \Leftrightarrow n = \sqrt{3 + \frac{110a + 110b + 770}{990}} \Leftrightarrow n = \sqrt{3 + \frac{a + b + 7}{9}}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\sqrt{a + b + 34}}{3}; \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b + 34 \text{ trebuie să fie un număr natural pătrat perfect și cum}$$

$b < a \Rightarrow a = 2$ și $b = 0$ sau $a = 8, b = 7$; dar $\sqrt{a + b + 34}$ trebuie să fie divizibil cu 3, deci singura soluție este $a = 2$ și $b = 0 \Rightarrow \overline{abcd} = 2017$.

Barem:

a)	Scrie $x^2 + 2017 = x^2 + xy + xz + yz = x(x + y) + z(x + y) = (x + y)(x + z)$	1p
	$y^2 + 2017 = (x + y)(y + z)$ și $z^2 + 2017 = (x + z)(y + z)$	1p
	$\sqrt{(x^2 + 2017)(y^2 + 2017)(z^2 + 2017)} = \sqrt{(x + y)^2(y + z)^2(x + z)^2} =$	1p
	$= (x + y)(y + z)(x + z) \in \mathbb{Q}$	1p
b)	Scrie n sub forma: $n = \sqrt{3 + \frac{\overline{ab7} - a + \overline{b7a} - b + \overline{7ab} - 7}{990}}$ și obține $n = \frac{\sqrt{a + b + 34}}{3}$	1p
	$n \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b + 34$ pătrat perfect, $b < a \Rightarrow a = 2$ și $b = 0$ sau $a = 8, b = 7$	1p
	Finalizare, $\overline{abcd} = 2017$	1p

2. a) (4p) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $x^2y - 5 = 3x + 2y$.

Prof. Gheorghe Iacoviță

b) (3p) Dacă numerele reale x, y, z îndeplinesc condițiile $x \geq 25, y \geq 36, z \geq 49$, arătați că:

$$5\sqrt{x - 25} + 6\sqrt{y - 36} + 7\sqrt{z - 49} \leq \frac{x + y + z}{2}.$$

Prof. Ana Marcela Popa

Soluție:

a) Ecuația mai poate fi scrisă sub forma: $x^2y - 2y = 3x + 5 \Leftrightarrow y(x^2 - 2) = 3x + 5 \Leftrightarrow y = \frac{3x + 5}{x^2 - 2} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x^2 - 2 \mid 3x + 5$ **(1)**; cum $x^2 - 2 \mid x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - 2 \mid 3x^2 - 6$ și din **(1)**, $x^2 - 2 \mid 3x^2 + 5x$, obținem

$x^2 - 2 \mid 3x^2 + 5x - 3x^2 + 6 \Leftrightarrow x^2 - 2 \mid 5x + 6$ **(2)**; din **(1)** și **(2)** obținem:

$$x^2 - 2 \mid 15x + 25 - 15x - 18 \Leftrightarrow x^2 - 2 \mid 7 \Rightarrow x^2 - 2 \in D_7 = \{-7, -1, 1, 7\} \Leftrightarrow x^2 \in \{-5, 1, 3, 9\}.$$

Avem situațiile:

- 1) $x^2 = -5$ nu convine
- 2) $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$; dacă $x = -1 \Rightarrow y = -2$; dacă $x = 1 \Rightarrow y = -8$;
- 3) $x^2 = 3 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$;
- 4) $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$; dacă $x = -3 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$; dacă $x = 3 \Rightarrow y = 2$.

În concluzie, $(x, y) \in \{(-1, -2); (1, -8); (3, 2)\}$.

b) Știind că $m_g \leq m_a \Rightarrow 5\sqrt{x-25} = \sqrt{25(x-25)} \leq \frac{x}{2}$ (1); $6\sqrt{y-36} = \sqrt{36(y-36)} \leq \frac{y}{2}$ (2);

$7\sqrt{z-49} = \sqrt{49(z-49)} \leq \frac{z}{2}$ (3). Din (1) + (2) + (3) $\Rightarrow 5\sqrt{x-25} + 6\sqrt{y-36} + 7\sqrt{z-49} \leq$

$$\leq \frac{x+y+z}{2}.$$

Barem:

a)	Scrie ecuația sub forma $x^2y - 2y = 3x + 5 \Leftrightarrow y(x^2 - 2) = 3x + 5 \Leftrightarrow y = \frac{3x+5}{x^2-2} \in \mathbb{Z}$	1p
	$x^2 - 2 \mid 3x + 5$; $x^2 - 2 \mid x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - 2 \mid 3x^2 - 6$ și $x^2 - 2 \mid 3x^2 + 5x$	1p
	Obține $x^2 - 2 \mid 5x + 6$ și $x^2 - 2 \mid 7 \Rightarrow x^2 - 2 \in D_7 = \{-7, -1, 1, 7\} \Leftrightarrow x^2 \in \{-5, 1, 3, 9\}$	1p
	Finalizare: $(x, y) \in \{(-1, -2); (1, -8); (3, 2)\}$	1p
b)	Scrie $m_g \leq m_a \Rightarrow 5\sqrt{x-25} = \sqrt{25(x-25)} \leq \frac{x}{2}$ (1); $6\sqrt{y-36} = \sqrt{36(y-36)} \leq \frac{y}{2}$ (2); $7\sqrt{z-49} = \sqrt{49(z-49)} \leq \frac{z}{2}$ (3)	2p
	(1) + (2) + (3) $\Rightarrow 5\sqrt{x-25} + 6\sqrt{y-36} + 7\sqrt{z-49} \leq \frac{x+y+z}{2}$	1p

3. Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului oarecare ΔABC considerăm punctele E , respectiv D . Fie F și G două puncte astfel încât $EF \parallel BD$ și $[EF] \equiv [BD]$, respectiv $DG \parallel EC$ și $[DG] \equiv [EC]$. Să se arate că :

a) (3p) $BCFG$ este paralelogram ;

b) (4p) $ED + BF + CG > 2FC$.

Prof. Laura Schroder

Soluție: a) Din $\left. \begin{array}{l} BD \parallel EF \\ [BD] \equiv [EF] \end{array} \right\} \Rightarrow BDFE \text{ paralelogram} \Rightarrow BF \cap ED = \{O\}$

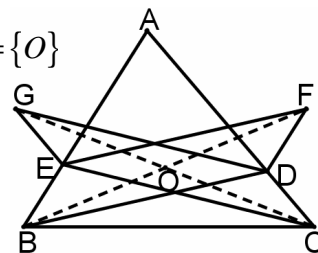
astfel încât $[EO] \equiv [OD]$ (1) și $[BO] \equiv [OF]$ (2) . Analog $GECD$

paralelogram $\Rightarrow GC \cap ED = \{O'\}$ astfel încât $[EO'] \equiv [O'D]$ (3) și

$[GO'] \equiv [O'C]$ (4). Din (1), (3) și unicitatea mijlocului unui segment

$\Rightarrow O = O'$. Din (2) și (4) și $O = O' \Rightarrow BCFG$ este paralelogram. **b)** Într-un patrulater convex suma

diagonalelor este mai mare decât suma a două laturi opuse. Atunci, în $BDFE$: $ED + BF > EF + BD$; în $ECDG$: $ED + CG > EC + DG$; în $BCFG$: $CG + BF > BG + CF$. Însumând cele trei relații obținem: $2(ED + BF + CG) > FE + EC + BD + GD + FC + BG$ și ținând cont că în ΔECF , $FE + EC > FC$, iar în ΔBDG , $BD + GD > BG$, se obține: $2(ED + BF + CG) > 2FC + 2BG = 4FC$ ($FC = BG$, deoarece $BCFG$ paralelogram) $\Rightarrow ED + BF + CG > 2FC$.



Barem:

a)	$BDEF$ paralelogram $\Rightarrow BF \cap ED = \{O\}$, $[EO] \equiv [OD]$ (1) și $[BO] \equiv [OF]$ (2)	1p
	$GECD$ paralelogram $\Rightarrow GC \cap ED = \{O'\}$, $[EO'] \equiv [O'D]$ (3) și $[GO'] \equiv [O'C]$ (4).	1p
	Din (1), (3) și unicitatea mijlocului unui segment $\Rightarrow O = O'$. Din (2) și (4) și $O = O' \Rightarrow BCFG$ este paralelogram.	1p
b)	Într-un patrulater convex suma diagonalelor este mai mare decât suma a două laturi opuse \Rightarrow în $BDFE$: $ED + BF > EF + BD$; în $ECDG$: $ED + CG > EC + DG$; în $BCFG$: $CG + BF > BG + CF$.	2p
	Însumează cele trei relații și obține: $2(ED + BF + CG) > 2FC + 2BG = 4FC$	1p
	Finalizare	1p

4. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $P \in (DC)$ astfel încât $AP \parallel BC$ și $BP \parallel AD$.

a) (4p) Dacă $AP \cap BD = \{M\}$ și $BP \cap AC = \{N\}$, arătați că $MN \parallel DC$.

b) (3p) Dacă $T \in (AB)$ astfel încât $NT \parallel AP$, atunci $[MT] \equiv [PN]$.

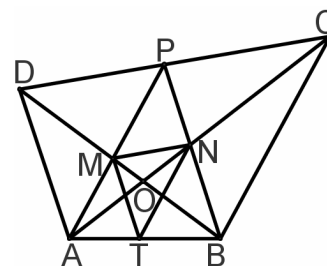
Soluție:

a) Fie O centrul patrulaterului $ABCD$.

$$\text{Pentru că } \left. \begin{array}{l} BP \parallel AD \xrightarrow{T.Thales} \frac{BO}{OD} = \frac{ON}{OA} \\ AP \parallel BC \xrightarrow{T.Thales} \frac{OM}{OB} = \frac{OA}{OC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OM}{OD} = \frac{ON}{OC}$$

(prin înmulțirea celor două relații, membru cu membru)

$\Rightarrow MN \parallel DC$ (conform reciprocei teoremei lui Thales);



b) Pentru că $NT \parallel AP \xrightarrow{T.Thales} \frac{AT}{TB} = \frac{AN}{NC}$; pentru că $NM \parallel CD \xrightarrow{T.Thales} \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MP}$, de unde

$\frac{AT}{TB} = \frac{AM}{MP}$ și conform reciprocei teoremei lui Thales avem $MT \parallel BP$. Așadar, $TNPM$ este paralelogram și $[MT] \equiv [PN]$.

Barem:

a)	$AC \cap BD = \{O\}$; $BP \parallel AD \xrightarrow{T.Thales} \frac{BO}{OD} = \frac{ON}{OA}$; $AP \parallel BC \xrightarrow{T.Thales} \frac{OM}{OB} = \frac{OA}{OC}$	2p
	Înmulțește relațiile, membru cu membru, și obține $\frac{OM}{OD} = \frac{ON}{OC}$	1p
	Finalizare, $MN \parallel DC$ (conform reciprocei teoremei lui Thales);	1p
b)	$NT \parallel AP \xrightarrow{T.Thales} \frac{AT}{TB} = \frac{AN}{NC}$ (1); $NM \parallel CD \xrightarrow{T.Thales} \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MP}$ (2)	1p
	Din (1) și (2) obține $\frac{AT}{TB} = \frac{AM}{MP} \xrightarrow{R.T.Thales} MT \parallel BP$	1p
	$TNPM$ este paralelogram $\Rightarrow [MT] \equiv [PN]$	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.