

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VI-a

1. a) (4p) Arătați că $P + Q < 1009$, dacă $P = \frac{1+2+2^2}{2 \cdot 3} + \frac{1+4+4^2}{4 \cdot 5} + \frac{1+6+6^2}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1+2016+2016^2}{2016 \cdot 2017}$

și $Q = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016}$.

prof. Laura Schroder, Câmpulung Moldovenesc

b) (3p) Determinați $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ știind că $a^{2017} + 7$ este divizibil cu $a - 1$.

prof. Ana Marcela Popa, Rădăuți

Soluție:

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \frac{1+2+2^2}{2 \cdot 3} + \frac{1+4+4^2}{4 \cdot 5} + \frac{1+6+6^2}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1+2016+2016^2}{2016 \cdot 2017} = \\ &= \frac{1+2(1+2)}{2 \cdot 3} + \frac{1+4(1+4)}{4 \cdot 5} + \frac{1+6(1+6)}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1+2016(1+2016)}{2016 \cdot 2017} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2(1+2)}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{4(1+4)}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{6(1+6)}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2017} + \frac{2016(1+2016)}{2016 \cdot 2017} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{6 \cdot 7}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2017} + \frac{2016 \cdot 2017}{2016 \cdot 2017} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2017} + \underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{de } 1008 \text{ ori}} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2017} + 1008 \\ P+Q &= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2017} + 1008 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016} = \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016} + \frac{1}{2016 \cdot 2017} + 1008 = \\ &= \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \frac{5-4}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2017-2016}{2016 \cdot 2017} + 1008 = \\ &= \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 4} - \frac{3}{3 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 5} - \frac{4}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2017}{2016 \cdot 2017} - \frac{2016}{2016 \cdot 2017} + 1008 = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} + 1008 = 1 - \frac{1}{2017} + 1008 = 1009 - \frac{1}{2017} < 1009. \end{aligned}$$

$$\text{b) } a^{2017} + 7 = ((a-1)+1)^{2017} + 7 = M_{a-1} + 1 + 7 = M_{a-1} + 8$$

Dar $(a-1)/(a^{2017} + 7)$ ne conduce la $(a-1)/(M_{a-1} + 8)$ de unde obținem că $(a-1)/8$ iar de aici $a-1 \in D_8 \Rightarrow a-1 \in \{1, 2, 4, 8\} \Rightarrow a \in \{2, 3, 5, 9\}$

Barem:

a) Aduce P la forma $P = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2017} + 1008$	2p
Calculează $P + Q = 1009 - \frac{1}{2017} < 1009$.	2p
b) Arată că $a^{2017} + 7 = M_{a-1} + 8$	1p
Din $(a-1)/(a^{2017} + 7)$ deduce $(a-1)/8$	1p
Finalizează $a \in \{2, 3, 5, 9\}$	1p

2. (7p) Determinați numerele de forma \overline{abcd} , scrise în baza zece, care îndeplinesc simultan condițiile: (i) $(\overline{ab}, \overline{cd}) = 1$; (ii) $(\overline{ab}, \overline{cd} - 2) = 5$; (iii) $\frac{\overline{cd} - 2}{\overline{ab}} = 0,75$. Prin (m, n) s-a notat cel mai mare divizor comun al numerelor m și n .

prof. Gheorghe Iacoviță, Frătăuții Vechi

Soluție: Condiția (iii) $\Leftrightarrow \frac{\overline{cd} - 2}{\overline{ab}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(\overline{cd} - 2) = 3\overline{ab}$

Din condiția (ii) $\Rightarrow \overline{ab} = 5k, \overline{cd} - 2 = 5p$, cu k și p prime între ele.

Atunci avem $4 \cdot 5p = 3 \cdot 5k \Leftrightarrow 4p = 3k$ de unde obținem $k:4$ și $p:3$.

Din $k:4 \Rightarrow k = 4t$ care înlocuit în relația $4p = 3k$ ne conduce la $p = 3t \Rightarrow (k, p) = t = 1$ deoarece k și p sunt prime între ele. Atunci $k = 4$ și $p = 3$ de unde obținem $\overline{ab} = 20$ și $\overline{cd} = 17$ care verifică și condiția (i).

Deci $\overline{abcd} = 2017$.

Barem:

Din (iii) obține $4\overline{cd} - 8 = 3\overline{ab}$	2p
Din condiția (ii) $\Rightarrow \overline{ab} = 5k, \overline{cd} - 2 = 5p$, cu k și p prime între ele	1p
Atunci avem $4 \cdot 5p = 3 \cdot 5k \Leftrightarrow 4p = 3k$ de unde obținem $k:4$ și $p:3$	1p
Determină $\overline{ab} = 20$ și $\overline{cd} = 17$	1p
Finalizează și obține $\overline{abcd} = 2017$	2p

3. Fie triunghiul isoscel MAC , cu unghiul AMC obtuz. Pe laturile $[MA]$ și $[MC]$ se consideră punctele V , respectiv I astfel încât $\sphericalangle MAI \equiv \sphericalangle MCV$. Arătați că:

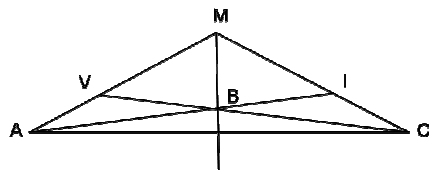
a) (3p) $[VA] \equiv [IC]$;

b) (4p) $[MB]$ este bisectoarea unghiului AMC , unde $\{B\} = AI \cap CV$.

prof. Claudia Marchitan, Suceava

Soluție:

a) Din triunghiul MAC isoscel cu unghiul AMC obtuz obținem că $\triangle MAC$ isoscel cu baza $[AC] \Rightarrow [MA] \equiv [MC]$.



Comparăm $\triangle MAI$ și $\triangle MCV$:

- 1) $\sphericalangle IMA \equiv \sphericalangle VMC$ (unghi comun)
 - 2) $[MA] \equiv [MC]$ ($\triangle MAC$ isoscel cu baza $[AC]$)
 - 3) $\sphericalangle MAI \equiv \sphericalangle MCV$ (ipoteză)
- $$\left. \begin{array}{l} 1) \sphericalangle IMA \equiv \sphericalangle VMC \text{ (unghi comun)} \\ 2) [MA] \equiv [MC] \text{ (}\triangle MAC \text{ isoscel cu baza } [AC]\text{)} \\ 3) \sphericalangle MAI \equiv \sphericalangle MCV \text{ (ipoteză)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} U.L.U \\ \Rightarrow \triangle MAI \equiv \triangle MCV \Rightarrow [MI] \equiv [MV] \end{array}$$

Din $[MA] \equiv [MC]$ și $[MV] \equiv [MI]$ obținem că $[VA] \equiv [IC]$ (diferență de segmente congruente).

b) Comparăm $\triangle VAB$ și $\triangle ICB$:

- 1) $[VA] \equiv [IC]$ (de la a))
 - 2) $\sphericalangle VAB \equiv \sphericalangle ICB$ (ipoteză)
 - 3) $\sphericalangle ABV \equiv \sphericalangle CBI$ (unghiuri opuse la vârf)
- $$\left. \begin{array}{l} 1) [VA] \equiv [IC] \text{ (de la a))} \\ 2) \sphericalangle VAB \equiv \sphericalangle ICB \text{ (ipoteză)} \\ 3) \sphericalangle ABV \equiv \sphericalangle CBI \text{ (unghiuri opuse la vârf)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} L.U.U \\ \Rightarrow \triangle VAB \equiv \triangle ICB \Rightarrow [AB] \equiv [CB] (*) \end{array}$$

Comparăm ΔMAB și ΔMCB :

$$\left. \begin{array}{l} 1) [MA] \equiv [MC] \text{ (}\Delta MAC \text{ isoscel cu baza } [AC]) \\ 2) \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MCB \text{ (ipoteză)} \\ 3) [AB] \equiv [CB] \text{ (din (*))} \end{array} \right\} \begin{array}{l} L.U.L. \\ \Rightarrow \Delta MAB \equiv \Delta MCB \Rightarrow \sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle CMB . \end{array}$$

Din $[MB \subset \text{Int}(\sphericalangle AMC)]$ și $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle CMB$ obținem că $[MB]$ este bisectoarea unghiului AMC .

Barem.

a) Figura	1p
Arată că $\Delta MAI \equiv \Delta MCV \Rightarrow [MI] \equiv [MV]$ și apoi deduce că $[VA] \equiv [IC]$	2p
b) Arată că $\Delta VAB \equiv \Delta ICB \Rightarrow [AB] \equiv [CB]$	2p
Arată că $\Delta MAB \equiv \Delta MCB \Rightarrow \sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle CMB$	1p
Din $[MB \subset \text{Int}(\sphericalangle AMC)]$ și $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle CMB$ obține că $[MB]$ este bisectoarea unghiului AMC .	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.