# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
# ETAPA LOCALĂ
# SUCEAVA
# 19 februarie 2017

## CLASA a XII-a

**1.** Fie $(G,\cdot)$ un grup finit și *a* un element fixat din *G*. Dacă există o funcție surjectivă $f:G\to G$ cu proprietatea că $f\left(x^3\right)=f(axa)$, $\forall x\in G$, să se demonstreze că:

**a)** **(5p)** $(G,\cdot)$ este grup abelian;

**b)** **(2p)** există un număr natural *k* astfel încât $\operatorname{ord}(G)=2^k$.

**2.** **(7p)** Pentru inelul $(A,+,\cdot)$ se consideră centrul său $Z(A)=\{x\in A \mid xy=yx,\ \forall y\in A\}$ și grupul unităților inelului $U(A)=\{x\in A \mid \exists y\in A \text{ a.î. } yx=xy=1\}$. Dacă $a,b,c\in \mathrm{C}(A)$ și $b+b\in U(A)$, iar $\left(ax^2+bx+c\right)y=y\left(ax^2+bx+c\right)$, $\forall x,y\in A$, să se demonstreze că *A* este inel comutativ.

**3.** Fie $m\in\mathbb{R}$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^{-2}e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ m, & x=0 \\ x\ln x, & x>0 \end{cases}$.

**a)** **(3p)** Să se determine valorile lui *m* pentru care $f$ admite primitive.

**b)** **(4p)** Pentru $m=0$ determinați o primitivă $F$ a funcției $f$ cu proprietatea că $F(0)=0$.

**4.** **(7p)** Fie $a,b>0$. Arătaţi că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin^2 x+b\cos^2 x}{b\sin^2 x+a\cos^2 x}dx\geq\frac{\pi}{2}$.

**Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
**2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.**
**3. Timp de lucru 3 ore.**