OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 19 februarie 2017
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE-CLASA a IX-a

1. a) (4p) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\{x\}\cdot[x]=x$.

b) (3p) Demonstrați că $\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right]=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right]$, pentru orice număr natural nenul n.

***

Soluție: a) $\{x\}\cdot[x]=x \Leftrightarrow \{x\}\cdot[x]=\{x\}+[x] \Leftrightarrow (\{x\}-1)([x]-1)=1$.

Deoarece $-1\le\{x\}-1<0$, rezultă $[x]-1<0 \Leftrightarrow [x]\le 0$. Fie $n=-[x], n\in\mathbb{N}$.

$\{x\}=1+\frac{1}{[x]-1}=1+\frac{1}{-n-1}=\frac{n}{n+1}\Rightarrow x=[x]+\{x\}=-\frac{n^2}{n+1}$. Mulțimea soluțiilor este $S=\left\{-\frac{n^2}{n+1}, n\in\mathbb{N}\right\}$.

b) Notăm $\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right]=k, k\in\mathbb{N}^* \Rightarrow k\le\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}<k+1 \Leftrightarrow \left(k-\frac{1}{2}\right)^2\le n+\frac{1}{4}<\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$k^2-k\le n<k^2+k \Leftrightarrow k^2-k\le n\le k^2+k-1 \Rightarrow n+\frac{1}{2}\le k^2+k-\frac{1}{2}<\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}<k+1$.

Obținem $k<\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}<k+1 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right]=k$.

Barem:

a) $\{x\}\cdot[x]=x \Leftrightarrow \{x\}\cdot[x]=\{x\}+[x] \Leftrightarrow (\{x\}-1)([x]-1)=1$.	2p
Determină soluțiile ecuației.	2p
b) Demonstrează egalitatea	3p

2. (7p) Să se determine funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ care îndeplinește condițiile:

$f(0)=3,\ f(1)=4$ și $4f(n)=f^2(n+1)-f^2(n-1)$, pentru orice număr natural $n\ge 1$.

Angelica Măzăreanu, Suceava

Soluție. $n=1\Rightarrow f^2(2)=4f(1)+f^2(0)=25\Rightarrow f(2)=5$.

Vom demonstra folosind metoda inducție matematice propoziția $P(n): f(n)=n+3, n\in\mathbb{N}$.

$P(0), P(1)$ sunt adevărate din ipoteză. Presupunem $P(k), P(k+1)$ adevărate pentru $k\in\mathbb{N}$ și demonstrăm $P(k+2)$ adevărată: $f^2(k+2)=4f(k+1)+f^2(k)=4(k+4)+(k+3)^2=k^2+10k+25=(k+5)^2\Rightarrow$ $f(k+2)=k+5$.

Conform principiului inducției matematice rezultă $f(n)=n+3, \forall n\in\mathbb{N}$.

Barem.

$n=1\Rightarrow f^2(2)=4f(1)+f^2(0)=25\Rightarrow f(2)=5$	1p
Demonstrează folosind metoda inducție matematice că $f(n)=n+3, \forall n\in\mathbb{N}$.	6p

3. (7p) Să se demonstreze că, pentru orice numere reale $a,b,c>0$ cu $a+b+c=3abc$, are loc inegalitatea:

$\frac{1}{a^2+b^2+1}+\frac{1}{b^2+c^2+1}+\frac{1}{c^2+a^2+1}\le 1$. Când se obține egalitatea?

Dan Popescu, Suceava

Soluție. Cu substituțiile „de simplificare” a condiției $\begin{cases}\frac{1}{ab}=z>0\\ \frac{1}{ac}=y>0\\ \frac{1}{bc}=x>0\end{cases}$, inegalitatea se echivalează cu

(*) $\frac{xyz}{x^2+y^2+xyz}+\frac{xyz}{y^2+z^2+xyz}+\frac{xyz}{z^2+x^2+xyz}\le 1$, $\forall x,y,z\in[0,\infty)$ cu $x+y+z=3$.

În adevăr, $\sqrt{xyz}=\frac{1}{abc}\Rightarrow\sqrt{xyz}=\frac{x}{a}\Rightarrow a^2=\frac{x}{yz}$ și analoagele.

Apoi $\frac{1}{a^2+b^2+1}=\frac{xyz}{x^2+y^2+xyz}$. Cum $\frac{xyz}{x^2+y^2+xyz}\le\frac{xyz}{2xy+xyz}=\frac{z}{z+2}$, inegalitatea (*) revine la

$\sum_{ciclic}\frac{x}{x+2}\le 1$, care este echivalentă cu $3-2\sum\frac{1}{x+2}\le 1$, $\forall x,y,z>0$ cu $x+y+z=3$, adică

$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\ge 1$, $\forall x,y,z>0$, cu $x+y+z=3$.

Din inegalitatea CBS avem $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\ge\frac{(1+1+1)^2}{x+y+z+6}=1$.

Egalitatea se realizează pentru $a=b=c=1$.

Barem.

Rescrie inegalitatea la $\frac{xyz}{x^2+y^2+xyz}+\frac{xyz}{y^2+z^2+xyz}+\frac{xyz}{z^2+x^2+xyz}\le 1$ $\forall x,y,z\in[0,\infty)$ cu $x+y+z=3$.	3p
$\frac{xyz}{x^2+y^2+xyz}\le\frac{xyz}{2xy+xyz}=\frac{z}{z+2}$	1p
Demonstrează $\sum_{ciclic}\frac{x}{x+2}\le 2$	2p
Finalizare	1p

4. (7p) Fie triunghiul ABC și A',B',C' mijloacele segmentelor $[BC],[CA]$ și respectiv $[AB]$, I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, *I’* centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$, G centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se arate că I,I' și G sunt puncte coliniare.

RMT 2/2014

Soluție. Notăm cu a,b,c lungimile laturilor triunghiului ABC și cu a',b',c' lungimile laturilor triunghiului $A'B'C'$. Triunghiul $A'B'C'$ fiind triunghi median triunghiului ABC, avem $a=2a';\mathrm{b}=2\mathrm{b}';\mathrm{c}=2\mathrm{c}'$.

Vectorii de poziție ai punctelor I și I' sunt:

$\vec{r_I}=\frac{1}{a+b+c}\left(\sum a\cdot\vec{r_A}\right)$ și $\vec{r_{I'}}=\frac{1}{a'+b'+c'}\left(\sum a'\cdot\vec{r_{A'}}\right)=\frac{1}{a+b+c}\left(\sum a\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{r_B}+\vec{r_C}\right)\right)\Rightarrow$

$\overrightarrow{GI}=\frac{1}{a+b+c}\left(\sum a\cdot\overrightarrow{GA}\right)$ și $\overrightarrow{GI'}=\frac{1}{2(a+b+c)}\left(\sum a\cdot\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)\right)=\frac{-1}{2(a+b+c)}\left(\sum a\cdot\overrightarrow{GA}\right)$, unde am folosit relația $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Am obținut $\overrightarrow{GI}=-2\overrightarrow{GI'}$, de unde rezultă coliniaritatea punctelor I,I' și G.

Barem.

$\vec{r_I}=\frac{1}{a+b+c}\left(\sum a\cdot\vec{r_A}\right)$, $\vec{r_{I'}}=\frac{1}{a'+b'+c'}\left(\sum a'\cdot\vec{r_{A'}}\right)=\frac{1}{a+b+c}\left(\sum a\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{r_B}+\vec{r_C}\right)\right)$	3p
$\overrightarrow{GI}=\frac{1}{a+b+c}\left(\sum a\cdot\overrightarrow{GA}\right)$ și $\overrightarrow{GI'}=\frac{1}{2(a+b+c)}\left(\sum a\cdot\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)\right)=\frac{-1}{2(a+b+c)}\left(\sum a\cdot\overrightarrow{GA}\right)$.	3p
Finalizare $\overrightarrow{GI}=-2\overrightarrow{GI'}$, de unde rezultă coliniaritatea punctelor I,I' și G	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.