

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

19 februarie 2017

CLASA a VIII-a

1. Fie a și b numere reale astfel încât: $a^2 + b^2 - 4a\left(1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\right) + 6b\sqrt{2} + 30 = 0$.

a) (5p) Determinați: $[a]$ și $[b]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x .

b) (2p) Aflați partea întreagă a lui $c = \frac{b - \{b\}}{\{a\}}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .

2. (7p) Arătați că:

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+1)(y+1)}} + \frac{x+y+2}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+2)(y+2)}} + \dots + \frac{x+y+2017}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+2017)(y+2017)}} \geq 2017,$$

pentru orice x, y numere reale pozitive.

3. (7p) Fie O și G centrele de greutate ale triunghiurilor $\triangle BCD$, respectiv $\triangle ACD$, situate

în plane diferite, N mijlocul segmentului $[CD]$, $M \in (AB)$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$ și

$MN \cap AO = \{E\}$. Să se arate că $EG \parallel (BCD)$.

4. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 7 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$ și punctele $E \in (BC)$, $F \in (CD)$ astfel încât $BE = CF = 1 \text{ cm}$. Se construiesc $EN \parallel AF$, $N \in (AB)$ și perpendiculara PN pe planul

dreptunghiului, $PN = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$. Dacă M este mijlocul lui $[AF]$,

a) (3p) arătați că $PE \perp EM$;

b) (4p) determinați lungimea segmentului $[PM]$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.