**OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**ETAPA LOCALĂ**

**SUCEAVA**

**19 februarie 2017**

**CLASA a IX-a**

**1. a) (4p)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\{x\}\cdot[x]=x$.

**b) (3p)** Demonstrați că $\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right]=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right]$, pentru orice număr natural nenul $n$.

**2. (7p)** Să se determine funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ care îndeplinește condițiile:
$f(0)=3,\ f(1)=4$ și $4f(n)=f^2(n+1)-f^2(n-1)$, pentru orice număr natural $n\geq 1$.

**3. (7p)** Să se demonstreze că, pentru orice numere reale $a,b,c>0$ cu $a+b+c=3abc$, are loc inegalitatea: $\frac{1}{a^2+b^2+1}+\frac{1}{b^2+c^2+1}+\frac{1}{c^2+a^2+1}\leq 1$. Când se obține egalitatea?

**4. (7p)** Fie triunghiul $ABC$ și $A',B',C'$ mijloacele segmentelor $[BC],[CA]$ și respectiv $[AB]$, $I$ centrul cercului înscris în triunghiul $ABC$, $I'$ centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$, $G$ centrul de greutate al triunghiului $ABC$. Să se arate că $I,I'$ și $G$ sunt puncte coliniare.

**Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
**2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.**
**3. Timp de lucru 3 ore.**