

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
19 februarie 2017

CLASA a X-a

- 1. a) (3p)** Să se determine numerele naturale a pentru care numărul $A = \sqrt{5 + \sqrt{a}} + \sqrt{5 - \sqrt{a}}$ este număr natural.
- b) (4p)** Să se determine numerele naturale a și b pentru care numărul $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{a}}{\sqrt{3} + \sqrt{b}}$ este număr rațional.
- 2. (7p)** Fie n un număr natural nenul și x, y, z numere reale, $x, y, z \in (0, 1)$ sau $x, y, z \in (1, \infty)$. Arătați că: $\log_{x^n z} y + \log_{y^n x} z + \log_{z^n y} x \geq \frac{3}{n+1}$
- 3. (7p)** Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte, de modul 1. Arătați că dacă $\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_3} + z_3 \overline{z_1}) = -\frac{3}{2}$, atunci acestea sunt afixeale vârfurilor unui triunghi echilateral.
- 4. (7p)** Să se decidă dacă există funcții $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ care satisfac relația:
 $f(f(xy)) = yf(e^x), \forall x, y \in (0, \infty)$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.