

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VIII-a

1. Fie a și b numere reale astfel încât: $a^2 + b^2 - 4a(1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}) + 6b\sqrt{2} + 30 = 0$.

a) (5p) Determinați: $[a]$ și $[b]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x .

b) (2p) Aflați partea întreagă a lui $c = \frac{b - \{b\}}{\{a\}}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .

Prof. Tamara Brutaru

Soluție: a) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$

Egalitatea devine: $a^2 + b^2 - 4a\sqrt{3} + 6b\sqrt{2} + 30 = 0$. De unde, $(a - 2\sqrt{3})^2 + (b + 3\sqrt{2})^2 = 0$

Cum $(a - 2\sqrt{3})^2 \geq 0$, $(b + 3\sqrt{2})^2 \geq 0$, avem $a = 2\sqrt{3}$, $b = -3\sqrt{2}$.

Din $a \in [3, 4) \Rightarrow [a] = 3$, $b \in [-5, -4) \Rightarrow [b] = -5$.

b) $c = \frac{-5}{2\sqrt{3} - 3} = -\frac{10\sqrt{3}}{3} - 5 \Rightarrow c \in [-11, -10) \Rightarrow [c] = -11$

Barem:

a) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} - 1$	1p
$a^2 + b^2 - 4a\sqrt{3} + 6b\sqrt{2} + 30 = 0$	1p
$(a - 2\sqrt{3})^2 + (b + 3\sqrt{2})^2 = 0$	1p
$a = 2\sqrt{3}$, $b = -3\sqrt{2}$	1p
$a \in [3, 4) \Rightarrow [a] = 3$, $b \in [-5, -4) \Rightarrow [b] = -5$	1p
b) $c = \frac{-5}{2\sqrt{3} - 3} = -\frac{10\sqrt{3}}{3} - 5$	1p
$-\frac{10\sqrt{3}}{3} - 5 \in [-11, -10) \Rightarrow [c] = -11$	1p

2. (7p) Arătați că:

$$\frac{x + y + 1}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+1)(y+1)}} + \frac{x + y + 2}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+2)(y+2)}} + \dots + \frac{x + y + 2017}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+2017)(y+2017)}} \geq 2017,$$

pentru orice x, y numere reale pozitive.

Gazeta matematică Nr.5/2016

Soluție. Arătam că pentru orice x, y numere reale pozitive și orice k număr natural nenul are loc

$$\frac{x + y + k}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+k)(y+k)}} \geq 1. \quad (1) \quad \text{Prin însumarea relațiilor (1) de la } k=1 \text{ la } k=2017 \text{ obținem relația de}$$

demonstrat. Relația (1) se demonstrează prin raționalizarea numitorului obținându-se

$$\frac{(x + y + k)(\sqrt{(x+k)(y+k)} - \sqrt{xy})}{k(x + y + k)} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+k)(y+k)} \geq k + \sqrt{xy}$$

Prin ridicare la pătrat: $xy + xk + yk + k^2 \geq k^2 + 2k\sqrt{xy} + xy \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$, adevărată din inegalitatea mediilor.

Barem.

$\frac{x+y+k}{\sqrt{xy} + \sqrt{(x+k)(y+k)}} \geq 1. \quad (1) \Leftrightarrow$	2p
$\Leftrightarrow \frac{(x+y+k)(\sqrt{(x+k)(y+k)} - \sqrt{xy})}{k(x+y+k)} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+k)(y+k)} \geq k + \sqrt{xy}$	2p
Prin ridicare la pătrat: $xy + xk + yk + k^2 \geq k^2 + 2k\sqrt{xy} + xy \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$, adevărată din inegalitatea mediilor	2p
Prin însumarea relațiilor (1) de la $k=1$ la $k=2017$ obținem relația de demonstrat.	1p

3. (7p) Fie O și G centrele de greutate ale triunghiurilor $\triangle BCD$, respectiv $\triangle ACD$, situate în plane diferite, N mijlocul segmentului $[CD]$, $M \in (AB)$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$ și $MN \cap AO = \{E\}$. Să se arate că $EG \parallel (BCD)$.

prof. Laura Schroder

Soluție.

Prin aplicarea teoremei lui Menelaus în triunghiul ABO pentru punctele coliniare M, E, N se obține:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NO} \cdot \frac{EO}{EA} = 1 \quad (1). \text{ Dar } \frac{MA}{AB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{MA}{AB-MA} = \frac{2}{5-2} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}, \text{ iar } \frac{NB}{NO} = 3, \text{ deoarece } O$$

centrul de greutate al triunghiului BCD . Din (1) va rezulta $\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{EO}{EA} = 1$ sau $\frac{EO}{EA} = \frac{1}{2} \quad (2).$

Deoarece G este centrul de greutate al triunghiului ADC rezultă că: $\frac{GN}{GA} = \frac{1}{2} \quad (3).$ Din (2)

$$\text{și } (3) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{EO}{EA} = \frac{GN}{GA} \Rightarrow EG \parallel ON \\ ON \subset (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow EG \parallel (BCD).$$

Barem.

Prin aplicarea teoremei lui Menelaus în triunghiul ABO pentru punctele coliniare M, E, N se obține: $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NO} \cdot \frac{EO}{EA} = 1 \quad (1)$	1p
$\frac{MA}{AB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{MA}{AB-MA} = \frac{2}{5-2} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$	1p
$\frac{NB}{NO} = 3$, deoarece O centrul de greutate al triunghiului BCD .	1p
Din (1) va rezulta $\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{EO}{EA} = 1$ sau $\frac{EO}{EA} = \frac{1}{2} \quad (2).$	1p
Deoarece G este centrul de greutate al triunghiului ADC rezultă că: $\frac{GN}{GA} = \frac{1}{2} \quad (3).$	1p
Din (2) și (3) $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{EO}{EA} = \frac{GN}{GA} \Rightarrow EG \parallel ON \\ ON \subset (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow EG \parallel (BCD).$	2p

4. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 7 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$ și punctele $E \in (BC)$, $F \in (CD)$ astfel încât $BE = CF = 1 \text{ cm}$. Se construiesc $EN \parallel AF$, $N \in (AB)$ și perpendiculara PN pe planul dreptunghiului,

$$PN = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}. \text{ Dacă } M \text{ este mijlocul lui } [AF],$$

- a) (3p) arătați că $PE \perp EM$;
b) (4p) determinați lungimea segmentului $[PM]$.

Soluție. a) $\triangle ABE \equiv \triangle ECF$ (C.C.) $\Rightarrow AE = EF \Rightarrow \triangle AEF$ isoscel; M este mijlocul lui $[AF] \Rightarrow EM \perp AF$, dar $EN \parallel AF$, de unde $\Rightarrow EN \perp EM$. Cum $PN \perp (ABC)$, conform teoremei celor 3 perpendiculare rezultă că $PE \perp EM$.

b) În $\triangle ADF \xrightarrow{T.P.} AF = 10 \text{ cm}$, în $\triangle ABE \xrightarrow{T.P.} AE = 5\sqrt{2} \text{ cm}$, în $\triangle AEM \xrightarrow{T.P.} EM = 5 \text{ cm}$.

$\triangle NBE \sim \triangle FDA$ (u.u.) $\Rightarrow NE = \frac{5}{4}$. În $\triangle MNE \xrightarrow{T.P.} MN = \frac{5\sqrt{17}}{4} \text{ cm}$. În

$\triangle PMN \xrightarrow{T.P.} PM = 6,25 \text{ cm}$

Barem:

a) $\triangle ABE \equiv \triangle ECF$ (C.C.) $\Rightarrow AE = EF \Rightarrow \triangle AEF$ isoscel; M este mijlocul lui $[AF] \Rightarrow EM \perp AF$	1p
$EN \parallel AF$, de unde $\Rightarrow EN \perp EM$	1p
Cum $PN \perp (ABC)$, conform teoremei celor 3 perpendiculare rezultă că $PE \perp EM$.	1p
b) În $\triangle ADF \xrightarrow{T.P.} AF = 10 \text{ cm}$, în $\triangle ABE \xrightarrow{T.P.} AE = 5\sqrt{2} \text{ cm}$, în $\triangle AEM \xrightarrow{T.P.} EM = 5 \text{ cm}$	2p
$\triangle NBE \sim \triangle FDA$ (u.u.) $\Rightarrow NE = \frac{5}{4}$	1p
În $\triangle MNE \xrightarrow{T.P.} MN = \frac{5\sqrt{17}}{4} \text{ cm}$. În $\triangle PMN \xrightarrow{T.P.} PM = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ cm}$.	1p

Notă:

Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.