

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”**

**ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 19 FEBRUARIE 2017**

**Profil tehnic, profil servicii, profil resurse naturale și protecția mediului,
profil real-specializarea științele naturii**

Clasa a XII-a

1. (7p) Fie a un număr real nenul și mulțimea $K = \{a, -a, ai, -ai\}$, unde i este unitatea imaginară. Să se determine a astfel încât mulțimea K împreună cu înmulțirea numerelor complexe să fie grup.
2. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 7x - 7y + 56$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
 - a) (2p) Să se determine două elemente $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $x * y \in \mathbb{Z}$;
 - b) (1p) Determinați un număr real a care satisface relația $x * a = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
 - c) (4p) Arătați că legea “*” este asociativă și calculați $\frac{1}{2} * \frac{2}{2} * \frac{3}{2} * \dots * \frac{2017}{2}$.
3. (7p) Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left| \sqrt{x-1} + 1 \right| + \left| \sqrt{x-1} - 1 \right|$. Arătați că funcția f admite primitive pe $[1, +\infty)$ și determinați primitiva F pentru care $F(2) = 2$.
4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$.
 - a) (1p) Arătați că funcția f verifică relația $\left(e^{-x} f(x) \right)' = f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
 - b) (6p) Determinați primitiva G a funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x) - f'(x)}{e^x}$ care satisface condiția $G(0) = 2017$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect primește un punctaj de la 0 la 7.

Timp de lucru efectiv 3 ore.