

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
“ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ**

Suceava, 19 februarie 2017

Clasa a X-a

**profil tehnic, profil servicii și resurse naturale și protecția mediului, profil real-
specializarea științele naturii**

1. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r, r > 0$ și $z_1 + 3z_2 - 4z_3 = 0$.
- a) **(5p)** Arătați că $\frac{1}{z_1} + \frac{3}{z_2} - \frac{4}{z_3} = 0$;
- b) **(2p)** Arătați că $z_2 \cdot z_3 + 3z_1 \cdot z_3 - 4z_1 \cdot z_2 = 0$.
2. Fie $a = \sqrt[3]{\sqrt{2017} + \sqrt{2018}} + \sqrt[3]{\sqrt{2017} - \sqrt{2018}}$.
- a) **(3p)** Arătați că $a^3 + 3a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- b) **(4p)** Arătați că $\log_{2017} \frac{a^3 + 3a}{2} + \log_a \left(\frac{2\sqrt{2017}}{a} - 3 \right) \in \mathbb{Q}$.
3. Fie $E(x, n) = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^n \cdot \log_x 2^{n+1}}, n \in \mathbb{N}^*, x \in (0, 1)$.
- a) **(4p)** Arătați că $E\left(\frac{1}{2}, n\right) = \frac{n}{n+1}$;
- b) **(3p)** Arătați că $E\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cdot E\left(\frac{1}{2}, 2\right) \cdot \dots \cdot E\left(\frac{1}{2}, 2017\right) = \frac{1}{2018}$.
4. a) **(3p)** Arătați că $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}, \forall a \in [0, \infty), \forall b \in [0, \infty)$;
- b) **(4p)** Arătați că $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \leq \sqrt[3]{4(a+b)}, \forall a \in [0, \infty), \forall b \in [0, \infty)$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect primește un punctaj de la 0 la 7.

Timp de lucru efectiv 3 ore.