OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 19 februarie 2017
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a XI-a

1. (7p) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale din intervalul $(0,\infty)$ și $y_n = x_1 x_2 \dots x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Dacă $1+y_1+y_2+\dots+y_{n-1} = y_n \sqrt[n]{n}$, $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Dan Popescu

<u>Soluție.</u> Evident $x_n = \dfrac{y_n}{y_{n-1}}$, $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

Pentru orice număr natural n, $n\geq 2$ avem $1+y_1+y_2+\dots+y_{n-1} = y_n\sqrt[n]{n}$ și
$1+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}+y_n = y_{n+1}\sqrt[n+1]{n+1}$. Scăzând membru cu membru aceste două relații obținem
$y_n = y_{n+1}\sqrt[n+1]{n+1} - y_n\sqrt[n]{n}$ de unde rezultă că $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{1+\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}}$, adică $x_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}}$, $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.
Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[n-1]{n-1}}{\sqrt[n]{n}} = \dfrac{1+1}{1} = 2$.

<u>Barem.</u>

$x_n = \dfrac{y_n}{y_{n-1}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$	1 p
$x_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$	3 p
Finalizare	3 p

2. Se consideră matricele $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ care satisfac relațiile $A^3 = (AB)^3 = I_2$.
a) (2p) Să se demonstreze că $(BA)^3 = I_2$.
b) (5p) Dacă, în plus, $A\neq I_2$, $B\neq I_2$ și $AB = BA$ să se arate că $(B-A)(B-A^2) = O_2$.

Cătălin Țigăeru

<u>Soluție.</u> a) $(AB)^3 = I_2 \Rightarrow ABABAB = I_2$. Înmulțind la stânga cu A^2 și la dreapta cu A obținem $BABABA = A^3$, adică $(BA)^3 = I_2$.

b) Deoarece $AB = BA$ rezultă $(AB)^3 = A^3B^3$, iar din $A^3 = (AB)^3 = I_2$ deducem că $B^3 = I_2$.
Trecând la determinanți obținem $(\det B)^3 = 1$ și cum $B\in M_2(\mathbb{R})$ rezultă $\det B = 1$.
Din relația Cayley-Hamilton avem $B^2 - tr(B)B + I_2 = O_2$. Prin înmulțire cu B se obține $I_2 - tr(B)B^2 + B = O_2$. Scăzând aceste relații ajungem la $(1+tr(B))(B^2-B) = O_2$.

Dacă $1+tr(B)\neq 0$ ar rezulta că $B^2 = B$ și cum $B^3 = I_2$ s-ar obține $B = I_2$, imposibil!
Deducem că $tr(B) = -1$ și din relația Cayley-Hamilton obținem $B^2+B+I_2 = O_2$.

Similar se obține $A^2+A+I_2 = O_2$. Scăzând relațiile și ținând cont că $AB = BA$ obținem
$B^2 - A^2 + B - A = O_2 \Rightarrow (B-A)(B+A+I_2) = O_2 \Rightarrow (B-A)(B-A^2) = O_2$.

Barem.

a) $(BA)^3 = I_2$	2 p
b) $B^3 = I_2$ și $\det B = 1$	2 p
$(1+tr(B))(B^2 - B) = O_2$ și $tr(B) = -1$	2 p
Finalizare	1 p

3. Fie A şi B două matrice pătratice de ordinul n aşa încât $AB = A + I_n$ şi $BA = B + I_n$.

a) (5p) Arătaţi că $A = B$.

b) (2p) Daţi exemplu de matrice cu proprietatea din enunţ.

Mihai Piticari, Vladimir Cerbu

Soluţie. a) $AB = A + I_n \Rightarrow A(B - I_n) = I_n \Rightarrow \det(A)\cdot\det(B - I_n) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow$ A este inversabilă și $A^{-1} = B - I_n$. Din $A^{-1}\cdot A = I_n \Rightarrow (B - I_n)A = I_n \Rightarrow BA - A = I_n \Rightarrow BA = A + I_n$. Dar $BA = B + I_n \Rightarrow A + I_n = B + I_n \Rightarrow A = B$.

b) Cum $A = B$, relaţiile din enunţ devin $A^2 - A - I_n = O_n$.

Luăm $A = \lambda I_n$, unde λ este o soluţie a ecuaţiei $x^2 - x - 1 = 0$ $\left(\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$.

Atunci $A^2 = \lambda^2 I_n$ și $A^2 - A - I_n = (\lambda^2 - \lambda - 1)I_n = O_n$, deci $A \cdot A = A + I_n$.

Barem.

a) $\det(A) \neq 0$	2 p
$A^{-1} = B - I_n$	1 p
$A^{-1}\cdot A = I_n \Rightarrow BA = A + I_n$	1 p
Obține $A = B$	1 p
b) Construcția unui exemplu	2 p

4. (7p) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^4 x_i + \sum\limits_{i=1}^{n}\cos^4 x_i\right)$.

Dumitru Crăciun

Soluţie. Pentru orice număr natural nenul i avem

$$\sin^4 x_i + \cos^4 x_i = \left(\sin^2 x_i + \cos^2 x_i\right)^2 - 2\sin^2 x_i \cos^2 x_i = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x_i.$$

Cum $\sin^2 2x_i \leq 1$ rezultă că $1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x_i \geq \dfrac{1}{2}$, deci $\sin^4 x_i + \cos^4 x_i \geq \dfrac{1}{2}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

Pentru orice număr natural nenul n avem $\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^4 x_i + \sum\limits_{i=1}^{n}\cos^4 x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sin^4 x_i + \cos^4 x_i\right) \geq \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{2}$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2} = \infty$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^4 x_i + \sum\limits_{i=1}^{n}\cos^4 x_i\right) = \infty$.

Barem.

$\sin^4 x_i + \cos^4 x_i = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x_i$	2 p
$\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^4 x_i + \sum\limits_{i=1}^{n}\cos^4 x_i \geq \frac{n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$	3 p
Finalizare	2 p

Notă: *Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.*