CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 19 FEBRUARIE 2017

Clasa a XII-a

Profil tehnic, profil servicii, profil resurse naturale și protecția mediului, profil real-specializarea științele naturii

1. **(7p)** Fie a un număr real nenul și mulțimea $K=\{a,-a,ai,-ai\}$, unde i este unitatea imaginară. Să se determine a astfel încât mulțimea K împreună cu înmulțirea numerelor complexe să fie grup.

<u>Rezolvare și barem</u>

Deoarece K este parte stabilă $\Rightarrow a^2\in K \Rightarrow a^2=a$ sau $a^2=-a \Rightarrow a=1$ sau $a=-1$ …... **2 puncte**

Pentru $a=1$ sau $a=-1 \Rightarrow K=\{1,-1,i,-i\}$ ……………………………………..………… **2 puncte**

Alcătuirea tablei înmulțirii pe K și verificarea axiomelor de grup ……………….......….. **3 puncte**

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se definește legea de compoziţie $x*y=xy-7x-7y+56$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) **(2p)** Să se determine două elemente $x,y\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel încât $x*y\in\mathbb{Z}$;

b) **(1p)** Determinați un număr real a care satisface relația $x*a=a$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

c) **(4p)** Arătaţi că legea “$*$” este asociativă şi calculaţi $\frac{1}{2}*\frac{2}{2}*\frac{3}{2}*...*\frac{2017}{2}$.

<u>Rezolvare și barem</u>

a) Luăm, de exemplu, $x*y=8 \Rightarrow (x-7)(y-7)+7=8 \Rightarrow (x-7)(y-7)=1$. Luăm, de exemplu, $x-7=\frac{2}{3}$ și $y-7=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\frac{23}{3}$ și $y=\frac{17}{2}$ …...………………………… **2 puncte**

b) $x*a=a$, $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow a=7$ ……………………………………………………...…. ….**1 punct**

c) $a*x=a$, $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow a=7$ ………………………………………………..…...……..**1 punct**

Asociativitatea …………………………………………………………………….….**1 punct**

Calcularea expresiei observând că $\frac{14}{2}=7$ este element absorbant…......……….……….. **2 puncte**

3. **(7p)** Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|$. Arătați că funcția f admite primitive pe $[1,+\infty)$ și determinați primitiva F pentru care $F(2)=2$.

<u>Rezolvare și barem</u>

$$f(x)=\begin{cases}2,\ x\in[1,2]\\ 2\sqrt{x-1},x\in(2,+\infty)\end{cases}$$ ……………………………………………………..………….. **2 puncte**

$$F(x)=\begin{cases}2x+c,x\in[1,2]\\ \frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{8}{3}+c,x\in(2,+\infty)\end{cases}$$ cu justificare ……………………………….……..….. **3 puncte**

$F(2)=2 \Rightarrow F(x)=\begin{cases} 2x-2, x\in[1,2] \\ \frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}, x\in(2,+\infty) \end{cases}$ ……………………………………………**2 puncte**

4. Se consideră funcția $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$.

a) **(1p)** Arătați că funcția f verifică relația $\left(e^{-x}f(x)\right)'=f'(x)\cdot e^{-x}-f(x)\cdot e^{-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) **(6p)** Determinați primitiva G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)-f'(x)}{e^x}$ care satisface condiția $G(0)=2017$.

<u>Rezolvare și barem</u>

a) Verificarea relației ……………………………………..………………………..…...……**1 punct**

b) $\int\frac{f(x)-f'(x)}{e^x}dx=\int\left[f(x)e^{-x}-f'(x)e^{-x}\right]dx=\int\left(-e^{-x}f(x)\right)'dx=-e^{-x}f(x)+C$ .....**4 puncte**

$G(x)=-\frac{f(x)}{e^x}+c$ și $G(0)=2017 \Rightarrow c=2016 \Rightarrow G(x)=-\frac{f(x)}{e^x}+2016$ …..……...**2 puncte**