OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

19 februarie 2017

CLASA a XI-a

1. (7p) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale din intervalul $(0,\infty)$ și $y_n = x_1 x_2 \ldots x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Dacă $1 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} = y_n \sqrt[n]{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

2. Se consideră matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ care satisfac relațiile $A^3 = (AB)^3 = I_2$.

a) (2p) Să se demonstreze că $(BA)^3 = I_2$.

b) (5p) Dacă, în plus, $A \neq I_2$, $B \neq I_2$ și $AB = BA$ să se arate că $(B - A)(B - A^2) = O_2$.

3. Fie A şi B două matrice pătratice de ordinul n aşa încât $AB = A + I_n$ şi $BA = B + I_n$.
a) (5p) Arătaţi că $A = B$.
b) (2p) Daţi exemplu de matrice cu proprietatea din enunţ.

4. (7p) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^4 x_i + \sum\limits_{i=1}^{n}\cos^4 x_i\right)$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.