CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 19 FEBRUARIE 2017

Clasa a XI-a

Profil tehnic, profil servicii, profil resurse naturale și protecția mediului,

profil real-specializarea științele naturii

1. **(7p)** Într-un sistem de axe de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B\left(4^a,16^a\right)$, $a\in\mathbb{R}$ și punctele variabile $M\left(2^x,4^x\right)$, unde $x\in\mathbb{R}$. Să se determine *a*, astfel încât *A*, *B* și *M* să fie puncte coliniare pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

<u>Rezolvare și barem</u>

A, *B*, *M* coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4^a & 16^a & 1 \\ 2^x & 4^x & 1 \end{vmatrix} = 0$ …………………………..….…………..……… **2 puncte**

$\left(4^a-1\right)\left(2^x-1\right)\left(2^x-4^a\right)=0$ **……………………………………………………..… 3 puncte**

$a=0$ **…………………………...………………………………………………… 2 puncte**

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. Pentru $n\in N^*$ definim matricea $B_n=A^n+A^{n+1}+A^{n+2}$.

a) **(3p)** Calculați A^n pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

b) **(2p)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det\left(B_1\right)=0$.

c) **(2p)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care toate matricele B_n, $n\in\mathbb{N}^*$ au determinantul nenul.

<u>Rezolvare și barem</u>

a) $A^3=aI_3$ și $A^{3k}=a^kI_3$ ……………………………………………………………...**1 punct**

$A^{3k+1}=A^{3k}\cdot A=a^kA$ **și** $A^{3k+2}=A^{3k}\cdot A^2=a^kA^2$ și finalizare…………………………......**2 puncte**

b) $B_1=A+A^2+A^3=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & a & a \end{pmatrix}$ ………………………………..................................**1 punct**

$det\left(B_1\right)=a\left(a-1\right)^2=0 \Rightarrow a=0$ sau $a=1$ …………...…………………………….……...**1 punct**

c) $B_n=A^n\left(I_3+A+A^2\right)=A^n\cdot B_1$ ……………………………...……………..………...**1 punct**

$det\left(B_n\right)=\det\left(A^nB_1\right)=\left[\det(A)\right]^n\cdot\det\left(B_1\right)=a^{n+1}\left(a-1\right)^2\neq 0\Rightarrow a\notin\{0,1\}$ ………...................**1 punct**

3. **(7p)** Se consideră funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, dată prin $f(n)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot ln(1+x)(1+2x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)$.

Determinați *n* astfel încât $2016\le f(n)\le 2017$.

<u>Rezolvare și barem</u>

$f(n)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{x}+\ldots+\frac{\ln(1+nx)}{x}\right]$ **……………………..………………2 puncte**

$f(n)=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ **…..……………………………………………………...2 puncte**

$2016\le f(n)\le 2017\Rightarrow 4032\le n(n+1)\le 4034\Rightarrow n=63$ **……………………………..3 puncte**

4. **(7p)** Să se determine parametrii reali *a*, *b*, *c* astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-2x+1\right)=3$.

<u>Rezolvare și barem</u>

Deoarece $a>0$ și $\Delta=b^2-4ac<0$ ……………………………………………..……........**2 puncte**

$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}-2+\frac{1}{x}\right)=3\Rightarrow\sqrt{a}-2=0\Rightarrow a=4$ ……..…………………………....**2 puncte**

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{4+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}-2+\frac{1}{x}\right)=3\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(4+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}-4+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{4+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+2-\frac{1}{x}}=3\Rightarrow$$

$\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\frac{b+4}{x}+\frac{c-1}{x^2}\right)=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}x\left(b+4+\frac{c-1}{x}\right)=12\Rightarrow b=-4$ și $c=13$ …..…..……**3 puncte**