OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 19 februarie 2017
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE-CLASA a X-a

1. a) (3p) Să se determine numerele naturale a pentru care numărul $A=\sqrt{5+\sqrt{a}}+\sqrt{5-\sqrt{a}}$ este număr natural.

b) (4p) Să se determine numerele naturale a și b pentru care numărul $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ este număr rațional.

Soluție: a) $5-\sqrt{a}\geq 0 \Leftrightarrow a\in\{0,1,...,25\}$.

$A^2=10+2\sqrt{25-a}, A\in\mathbb{N}$, deci $25-a$ și A^2 sunt pătrate perfecte.

$a=16$ este unica valoare pentru care se verifică cerința.

b) Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$ două numere naturale prime între ele pentru care $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}=\dfrac{m}{n}$. Avem:

$$n\left(\sqrt{2}+\sqrt{a}\right)=m\left(\sqrt{3}+\sqrt{b}\right)\Leftrightarrow n\sqrt{2}-m\sqrt{3}=m\sqrt{b}-n\sqrt{a}\Rightarrow\left(n\sqrt{2}-m\sqrt{3}\right)^2=\left(m\sqrt{b}-n\sqrt{a}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow an^2+bm^2-2mn\sqrt{ab}=3m^2+2n^2-2\sqrt{6}mn\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{6}-\sqrt{ab}\right)mn=3m^2+2n^2-an^2-bm^2.$$

Este necesar ca $\sqrt{6}=\sqrt{ab}\Leftrightarrow ab=6\Leftrightarrow (a,b)\in\{(1,6),(2,3),(3,2),(6,1)\}$.

După verificări obținem $a=3, b=2$.

Barem:

a) $5-\sqrt{a}\geq 0\Leftrightarrow a\in\{0,1,...,25\}$	1p
$A^2=10+2\sqrt{25-a}, A\in\mathbb{N}$, deci $25-a$ și A^2 sunt pătrate perfecte.	1p
$a=16$ este unica valoare pentru care se verifică cerința.	1p
b) Demonstrează că $ab=6$	3p
Determină numerele	1p

2. (7p) Fie n un număr natural nenul și x,y,z numere reale, $x,y,z\in(0,1)$ sau $x,y,z\in(1,\infty)$. Arătați că:

$$\log_{x^n z} y+\log_{y^n x} z+\log_{z^n y} x\geq\frac{3}{n+1}$$

Supliment G.M.2/2016

Soluție. Notăm $a=\log_\alpha x, b=\log_\alpha y, c=\log_\alpha z$, unde $\alpha\in(0,1)$ sau $\alpha\in(1,+\infty)$ astfel încât $a,b,c>0$.

Inegalitatea devine $\dfrac{a}{nc+b}+\dfrac{b}{na+c}+\dfrac{c}{nb+a}\geq\dfrac{3}{n+1}$. Folosind CBS sub forma Titu Andreescu obținem:

$$\frac{a}{nc+b}+\frac{b}{na+c}+\frac{c}{nb+a}=\frac{a^2}{nca+ba}+\frac{b^2}{nab+cb}+\frac{c^2}{nbc+ac}\geq\frac{(a+b+c)^2}{(n+1)(ab+bc+ca)}$$

Suficient să demonstrăm că $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow\sum a^2\geq\sum ab\Leftrightarrow\sum(a-b)^2\geq 0$, adevărat.

Egalitatea se obține pentru $a=b=c$, ceea ce atrage după sine condiția $x=y=z$.

Barem.

Scrie inegalitatea sub forma $\dfrac{a}{nc+b}+\dfrac{b}{na+c}+\dfrac{c}{nb+a}\geq\dfrac{3}{n+1}$	2p
$\dfrac{a}{nc+b}+\dfrac{b}{na+c}+\dfrac{c}{nb+a}=\dfrac{a^2}{nca+ba}+\dfrac{b^2}{nab+cb}+\dfrac{c^2}{nbc+ac}\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{(n+1)(ab+bc+ca)}$	3p
Finalizare $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow\sum a^2\geq\sum ab\Leftrightarrow\sum(a-b)^2\geq 0$	2p

3. (7p) Fie z_1,z_2,z_3 numere complexe distincte, de modul 1. Arătați că dacă $\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}\right)=-\dfrac{3}{2}$, atunci acestea sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Supliment G.M.3/2016

Soluție. $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \Rightarrow \overline{z_i}=\frac{1}{z_i}, \forall i=\overline{1,3}.$

$$\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}\right)=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}+\overline{z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}}=-3 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+3=0 \Leftrightarrow$$

$\left(z_1+z_2+z_3\right)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=0 \Leftrightarrow |z_1+z_2+z_3|^2=0 \Rightarrow z_1+z_2+z_3=0$, de unde deducem că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Barem.

$\lvert z_1\rvert=\lvert z_2\rvert=\lvert z_3\rvert=1 \Rightarrow \overline{z_i}=\frac{1}{z_i}, \forall i=\overline{1,3}.$	1p
Demonstrează $z_1+z_2+z_3=0$	5p
Finalizare z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.	1p

4. (7p) Să se decidă dacă există funcții $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ care satisfac relația:

$f\left(f\left(xy\right)\right) = yf\left(e^x\right), \forall x, y\in(0,\infty).$

Soluție. Pentru $y=1$, $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(e^x\right), \forall x\in\mathbb{R}$.

Demonstrăm că f este aplicație injectivă.

Dacă $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$, atunci $f\left(f\left(x_1\right)\right)=f\left(f\left(x_2\right)\right)$ și $f\left(e^{x_2}\right)=f\left(e^{x_1}\right)$.

Apoi, pentru $(x,y)=(x_1,x_2)$ și $(x,y)=(x_2,x_1)$ în relația enunțului, se obțin: $f\left(f\left(x_1x_2\right)\right)=x_1 f\left(e^{x_2}\right)$, dar și $f\left(f\left(x_2x_1\right)\right)=x_2 f\left(e^{x_1}\right)$, adică $x_1 f\left(e^{x_2}\right)=x_2 f\left(e^{x_1}\right)$. Atunci $x_1=x_2$, adică f este injecție, ceea ce asigură $f(x)=e^x, \forall x\in(0,\infty)$, ori restricția exponențialei nu verifică enunțul.

Barem.

Pentru $y=1$, $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(e^x\right), \forall x\in\mathbb{R}$	1p
Demonstrează că f este aplicație injectivă	4p
Determină $f(x)=e^x, \forall x\in(0,\infty)$	1p
Verificare și finalizare	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.