OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 19 februarie 2017
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a XII-a

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit și a un element fixat din G. Dacă există o funcție surjectivă $f:G\to G$ cu proprietatea că $f\left(x^3\right)=f\left(axa\right),\ \forall x\in G$, să se demonstreze că:

a) (5p) $(G,\cdot)$ este grup abelian;

b) (2p) există un număr natural k astfel încât $\operatorname{ord}(G)=2^k$.

Dumitru Crăciun

Soluție. **a)** Deoarece G este mulțime finită și funcția $f:G\to G$ este surjectivă rezultă că f este și injectivă. Din $f\left(x^3\right)=f\left(axa\right),\ \forall x\in G$ obținem $x^3=axa,\ \forall x\in G$ $\quad(1)$.

Fie e elementul neutru din G. Pentru $x=e$, din relația (1) se obține $a^2=e$.

Pentru orice $x\in G$ avem $(xa)^3=a(xa)a=ax$. Dar $(xa)^3=(xa)(xa)(xa)=x(axa)xa==xx^3xa=x^5a$, deci $x^5a=ax$. Compunând la dreapta cu a obținem $x^5=axa$, adică $x^5=x^3$, deci $x^2=e$. Din $x^2=e,\ \forall x\in G$ rezultă $x=x^{-1},\ \forall x\in G$.

Oricare ar fi $x,y\in G$ avem $xy=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=yx \Rightarrow (G,\cdot)$ este grup abelian.

b) Dacă $G=\{e\}$ atunci $\operatorname{ord}(G)=1=2^0$, deci $k=0$.

Dacă $G\neq\{e\}$ fie p un divizor prim al lui $\operatorname{ord}(G)$. Din teorema lui Cauchy rezultă că G conține elemente de ordin p, adică $\exists x\in G$ cu $\operatorname{ord}(x)=p$. Din $x^2=e$ deducem că $p/2$ și cum p este prim rezultă $p=2$.

În concluzie există un număr natural k astfel încât $\operatorname{ord}(G)=2^k$.

Barem.

a) obține relația (1)	1 p
demonstrează $a^2=e$	1 p
obține $x^2=e,\ \forall x\in G$	2 p
finalizare	1 p
b) demonstrează $\operatorname{ord}(G)=2^k$	2 p

2. (7p) Pentru inelul $(A,+,\cdot)$ se consideră centrul său $Z(A)=\{x\in A\ /\ xy=yx,\ \forall y\in A\}$ și grupul unităților inelului $U(A)=\{x\in A\ /\ \exists y\in A \text{ a.î. } yx=xy=1\}$. Dacă $a,b,c\in Z(A)$ și $b+b\in U(A)$, iar $\left(ax^2+bx+c\right)y=y\left(ax^2+bx+c\right),\ \forall x,y\in A$, să se demonstreze că A este inel comutativ.

Dan Popescu

Soluție. Din enunț rezultă că $ax^2y+bxy+cy=yax^2+ybx+yc$, $\forall x,y\in A$, de unde obținem $ax^2y+bxy+cy=ayx^2+byx+cy$, $\forall x,y\in A$ sau $ax^2y+bxy=ayx^2+byx$, $\forall x,y\in A$ $\quad(1)$.

În relația (1) se înlocuiește x cu $-x$ și se obține $ax^2y-bxy=ayx^2-byx$, $\forall x,y\in A$ (2).

Scăzând relațiile (1) și (2) se deduce că $(b+b)xy=(b+b)yx$, $\forall x,y\in A$.

Cum $b+b\in U(A)$ rezultă $(b+b)^{-1}(b+b)xy=(b+b)^{-1}(b+b)yx$, $\forall x,y\in A$ adică $xy=yx$, $\forall x,y\in A$.

Barem.

Obține relația (1)	2 p
Obține $(b+b)xy=(b+b)yx$, $\forall x,y\in A$	3 p
Finalizare	2 p

3. Fie $m\in\mathbb{R}$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^{-2}e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ m, & x=0 \\ x\ln x, & x>0 \end{cases}$.

a) (3p) Să se determine valorile lui m pentru care f admite primitive.

b) (4p) Pentru $m=0$ determinați o primitivă F a funcției f cu proprietatea că $F(0)=0$.

***

Soluţie. **a)** Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y^2}{e^y}=0$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\ln x=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$.

Cum $f(0-0)=f(0+0)=0 \Rightarrow \exists\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

Dacă $m\neq 0 \Rightarrow f(0)\neq 0 \Rightarrow x=0$ este punct de discontinuitate de speţa I pentru $f \Rightarrow$ f nu are proprietatea lui Darboux $\Rightarrow f$ nu admite primitive.

Dacă $m=0 \Rightarrow f(0)=0$, deci f este continuă în 0. Cum f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,\infty)$ rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow f$ admite primitive.

b) Pentru $m=0$ avem $f(x)=\begin{cases} x^{-2}e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x\ln x, & x>0 \end{cases}$ și conform punctului a) funcția f admite primitive.

Pentru $x\in(-\infty,0)$ avem $\displaystyle\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=-e^{\frac{1}{x}}+C$ (1),

iar pentru $x\in(0,\infty)$ avem $\displaystyle\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$ (2).

Din relațiile (1) și (2) rezultă că o primitivă F a lui f cu proprietatea $F(0)=0$ va fi de forma:

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad F(x)=\begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}+k_1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+k_2, & x>0 \end{cases}.$$

Funcția F trebuie să fie continuă în 0, deci $F(0-0)=F(0+0)=F(0) \Leftrightarrow k_1=k_2=0$.

Ținând cont de relațiile (1) și (2) și folosind corolarul teoremei lui Lagrange pentru studiul derivabilității unei funcții într-un punct se verifică imediat că funcția

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad F(x)=\begin{cases} -e^{\frac{1}{x}} & , \ x<0 \\ 0 & , \ x=0 \\ \dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4} & , \ x>0 \end{cases}$$ este primitiva căutată.

Barem.

a) Arată că $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$	1 p
Demonstrează că pentru $m\neq 0$ funcția f nu admite primitive	1 p
Demonstrează că pentru $m=0$ funcția f admite primitive	1 p
b) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad F(x)=\begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}+k_1 & , \ x<0 \\ 0 & , \ x=0 \\ \dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+k_2 & , \ x>0 \end{cases}$	2 p
Finalizare	2 p

4. (7p) Fie $a,b>0.$ Arătaţi că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin^2 x+b\cos^2 x}{b\sin^2 x+a\cos^2 x}dx\geq\frac{\pi}{2}.$

Ion Bursuc

Soluție. Fie $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin^2 x+b\cos^2 x}{b\sin^2 x+a\cos^2 x}dx$. Cu schimbarea de variabilă $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ obținem

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{a\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+b\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{b\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+a\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}\right)dy \;\Rightarrow\; I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b\sin^2 x+a\cos^2 x}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}dx.$$

Folosind inegalitatea $u+v\geq 2\sqrt{uv}$, $\forall u,v\geq 0$ obținem

$$\frac{a\sin^2 x+b\cos^2 x}{b\sin^2 x+a\cos^2 x}+\frac{b\sin^2 x+a\cos^2 x}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}\geq 2\sqrt{\frac{a\sin^2 x+b\cos^2 x}{b\sin^2 x+a\cos^2 x}\cdot\frac{b\sin^2 x+a\cos^2 x}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}}=2,\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

$$\Rightarrow 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a\sin^2 x+b\cos^2 x}{b\sin^2 x+a\cos^2 x}+\frac{b\sin^2 x+a\cos^2 x}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}\right)dx \;\geq\; \int_0^{\frac{\pi}{2}}2\,dx=2\cdot\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; I\geq\frac{\pi}{2}.$$

Barem.

Demonstrează $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b\sin^2 x+a\cos^2 x}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}dx$	2 p
Demonstrează $\dfrac{a\sin^2 x+b\cos^2 x}{b\sin^2 x+a\cos^2 x}+\dfrac{b\sin^2 x+a\cos^2 x}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}\geq 2,\ \forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$	3 p
Finalizare	2 p

Notă:
Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.