OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
21 IANUARIE 2017
CLASA a VIII-a
Bareme

Subiectul 1.

	Din $a+b=n$ obținem că $a=n-b$ și atunci avem: $a^2+4nb=(n-b)^2+4nb=n^2-2nb+4nb+b^2=n^2+2nb+b^2=(n+b)^2$ Prin urmare, $\sqrt{a^2+4nb}=\sqrt{(n+b)^2}=\lvert n+b\rvert=n+b$	**4p**
	Analog, $\sqrt{b^2+4na}=n+a$, de unde $\sqrt{a^2+4nb}+\sqrt{b^2+4na}=n+b+n+a=3n$	**3p**

Subiectul 2.

	$(a+2b+3c)^2=9=3(2ab+6bc+3ac)\Rightarrow$ $\Rightarrow a^2+4b^2+9c^2+4ab+12bc+6ac=6ab+18bc+9ac\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2+4b^2+9c^2-2ab-6bc-3ac=0\vert\cdot 2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2a^2+8b^2+18c^2-4ab-12bc-6ac=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a^2-4ab+4b^2)+(4b^2-12bc+9c^2)+(a^2-6ac+9c^2)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a-2b)^2+(2b-3c)^2+(a-3c)^2=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a-2b=2b-3c=a-3c=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a=2b=3c$	**5p**
	Folosind relația $a+2b+3c=3$ obţinem $a=2b=3c=1$, de unde a=1, $b=\frac{1}{2}$ și $c=\frac{1}{3}$	**1p**
	$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1+2+3=6\in\mathbb{N}$.	**1p**

Soluţia 2

	$(a+2b+3c)^2=9\Rightarrow a^2+4b^2+9c^2+4ab+12bc+6ac=9$ Dar $4ab+12bc+6ac=6\Rightarrow a^2+4b^2+9c^2=3$ $a^2+4b^2+9c^2-2(a+2b+3c)=3-6$ $\Leftrightarrow (a^2-2a+1)+(4b^2-4b+1)+(9c^2-6c+1)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a-1)^2+(2b-1)^2+(3c-1)^2=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a-1=2b-1=3c-1=0\Leftrightarrow$	**5p**
	de unde a=1, $b=\frac{1}{2}$ și $c=\frac{1}{3}$	**1p**
	$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1+2+3=6\in\mathbb{N}$.	**1p**

Subiectul 3.

	$\left.\begin{cases} MA\perp(ABCD) \\ AD\perp DC \\ A\notin CD \end{cases}\right\}\Rightarrow cf.\,Teoremei\ celor\ 3\ perpendiculare\Rightarrow MD\perp DC$	**2p**
	În triunghiul dreptunghic MDC, DP este înălțime $\Rightarrow DP=\frac{MD\cdot DC}{MC}\Rightarrow MC=\frac{MD\cdot AB}{DP}$	**2p**
	Analog obținem în triunghiul dreptunghic în B, MBC: $MC=\frac{MB\cdot AD}{BQ}$	**2p**
	Din relațiile *(1)* și *(2)* ⇒BQ·MD·AB=AD·DP·MB	**1p**

Subiectul 4.

	Notăm: OM=x, ON=y și OP=z. Ținând cont de faptul că triunghiul ABC este echilateral obținem că: x+y+z=$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	2p
	În triunghiul dreptunghic VOM, OE este înălțimea din vârful O. Prin urmare: $OE=\frac{OM\cdot VO}{VM}=\frac{xh}{\sqrt{h^2+x^2}}$ (1) Ținând cont de faptul că:$h^2+x^2\geq 2xh \Rightarrow \sqrt{h^2+x^2}\geq\sqrt{2xh}\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}}\leq\frac{1}{\sqrt{2xh}}\Rightarrow\frac{xh}{\sqrt{h^2+x^2}}\leq\frac{xh}{\sqrt{2xh}}=\sqrt{\frac{xh}{2}}\Rightarrow$ $cf.(1)\Rightarrow OE\leq\sqrt{\frac{xh}{2}}$ (2)	2p
	Analog, obținem $OF\leq\sqrt{\frac{yh}{2}}$ (3) și $OG\leq\sqrt{\frac{zh}{2}}$ (4) Adunând relațiile (2), (3) și (4), obținem: (5) $OE+OF+OG\leq\sqrt{\frac{h}{2}}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$	1p
	Folosind inegalitatea: $(\alpha+\beta+\gamma)^2\leq 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ pentru $\begin{cases}\alpha=\sqrt{x}\\ \beta=\sqrt{y}\\ \gamma=\sqrt{z}\end{cases}$ obținem (6) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\leq 3(x+y+z)$, Din (6) folosind faptul că x+y+z=$\frac{a\sqrt{3}}{2}$ obținem: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq\sqrt{\frac{3\sqrt{3}a}{2}}$ (7)	1p
	Din relațiile (5) și (7) avem: $$OE+OF+OG\leq\sqrt{\frac{h}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3\sqrt{3}a}{2}}=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}ah}{4}}=\frac{\sqrt{3\sqrt{3}ah}}{2}$$	1p