Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil uman
Etapa locală - 17 februarie 2017

Clasa a IX-a

1. a) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $\left[\frac{4x-2}{3}\right]=-5$;

b) Demonstrați egalitatea $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 4}\right]=6$;

c) Arătați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+...+\left[\sqrt{n(n+1)}\right]=\frac{n(n+1)}{2}$.

2. a) Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi mulţimile $A=\left\{x\in\mathbb{Q}\,\middle|\; x=\frac{2n^2+1}{n^2+2n}\right\}$, $B=\left\{x\in A \;\middle|\; 1\le x\le 2\right\}$. Arătați că $A=B$.

b) Rezolvați ecuaţia: $(2x+1)+(2x+5)+(2x+9)+\ldots+(2x+37)=210$.

3. Dintr-o clasă cu 30 de elevi 12 dintre ei practică sporturi de iarnă, 16 elevi practică sporturi de vară, iar 7 elevi practică şi sporturi de iarnă şi de vară. Câţi elevi din clasă nu practică nici un sport ?

4. În reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-3,1)$ şi $C(4,-1)$. Să se afle coordonatele punctului $D\in Ox$, astfel încât vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ să fie coliniari.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil uman
Faza locală - 17 februarie 2017

Clasa a IX-a - barem de corectare

1. a)	Se folosește proprietatea părții întregi: $[a]=n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n\le a<n+1$. Atunci: $-5\le\frac{4x-2}{3}<-4\,\vert\;\cdot 3>0$, de unde $-15\le 4x-2<-12\,\vert\;+2$, adică $-13\le 4x<-10\,\vert :4>0$. Deci $x\in\left[-\frac{13}{4},-\frac{5}{2}\right)\cap\mathbb{Z}=\{-3\}$.	1p 1p
1.b)	Sunt adevărate inegalităţile: $1<\sqrt{1\cdot 2}<2\Rightarrow\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]=1$, $2<\sqrt{2\cdot 3}<3\Rightarrow\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]=2$, $3<\sqrt{3\cdot 4}<4\Rightarrow\left[\sqrt{3\cdot 4}\right]=3$, adunând toate cele 3 egalităţi $\Rightarrow\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 4}\right]=6$.	 1p 1p
1.c)	Avem: $1<\sqrt{1\cdot 2}<2\Rightarrow\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]=1$ $2<\sqrt{2\cdot 3}<3\Rightarrow\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]=2$ ... $n<\sqrt{n(n+1)}<n+1\Rightarrow\left[\sqrt{n(n+1)}\right]=n$ prin însumare, obţinem : $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+...+\left[\sqrt{n(n+1)}\right]=1+2+...+n=\underbrace{(n+1)+(n+1)+...+(n+1)}_{de\frac{n}{2}ori}=\frac{n(n+1)}{2}$.	 1p 2p
2.a)	Este evident că $B\subset A$. Arată că $A\subset B$. Din $B\subset A$ rezultă $x=\frac{2n^2+1}{n^2+2n}$. Avem $\frac{2n^2+1}{n^2+2n}\ge 1\Leftrightarrow\frac{n^2-2n+1}{n^2+2}\ge 0\Leftrightarrow\frac{(n-1)^2}{n^2+2n}\ge 0,\forall n\in\mathbb{N}^*$, adevărată (1) $\frac{2n^2+1}{n^2+2n}\le 2\Leftrightarrow\frac{1-4n}{n^2+2n}\le 0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, adevărată (2) Din (1) si (2) $\Rightarrow 1\le x\le 2$, deci $A\subset B$. Din $A\subset B$ și $B\subset A\Rightarrow A=B$.	 1p 1p 1p 1p
2.b)	Avem că $(2x+1),(2x+5),(2x+9)\ldots$ sunt termeni în progresie aritmetică cu raţia $r=4$. Folosim $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$, $a_n=a_1+(n-1)r$. În cazul acestei probleme avem $\begin{cases}\frac{(2x+1+2x+37)n}{2}=210\\2x+1+(n-1)4=2x+37\end{cases}$. Rezultă $(2x+19)n=210$. Înlocuind $n=10$, obţine din a doua ecuaţie, se obţine $x=1$.	1p 1p 1p
3.	Fie A_1 numărul elevilor care practică sporturi de iarnă;	

	A_2 numărul elevilor care practică sporturi de vară; $\left\|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2\right\| = 30 - \left\|A_1\right\| - \left\|A_2\right\| + \left\|A_1 \cap A_2\right\| = 30 - 12 - 16 + 7 = 9$. Deci, 9 elevi nu practică sport.	2p 4p 1p
4.	Fie $D \in Ox$, adică $D(x,0)$. $\overrightarrow{AB} = -5\vec{i} - 2\vec{j}$ $\overrightarrow{CD} = (x-4)\vec{i} + \vec{j}$ Vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă există $k \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$. Rezultă $-5\vec{i} - 2\vec{j} = k(x-4)\vec{i} + k\vec{j}$. De aici se obţine $k = -2$ şi $x = \frac{13}{2}$. Deci $D\left(\frac{13}{2}, 0\right)$.	1p 1p 1p 2p 2p

NOTĂ: Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.