Olimpiada de matematică
Faza Zonală - 17 februarie 2017

Clasa a XII-a - Enunţuri

1. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea "$\circ$" prin relaţia $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Să se determine elementele din $\mathbb{Z}$, simetrizabile în raport cu legea "$\circ$";

b) Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \ldots \circ x}_{x \text{ de } 2017 \text{ ori}} = x$.

2. a) Demonstrați că $t^2 \int_a^b f^2(x)dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și orice funcții continue $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

b) Folosind eventual punctul anterior, deduceți că pentru orice funcții continue $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ are loc inegalitatea

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

c) Demonstrați că $\int_0^1 e^x \sqrt{x}dx \leq \frac{1}{2}\sqrt{e^2 - 1}$.

3. Fie $(S, +, \cdot)$ un inel oarecare cu proprietatea că pentru orice $x, y \in S$ cu $x \cdot y = 0$, avem $y \cdot x = 0$. (*unde 0 reprezintă elementul neutru al operației "$+$"*)

a) Dacă $a, b \in S$ cu $a \cdot b = 1$ atunci $b \cdot a = 1$ (*unde 1 reprezintă elementul neutru al operației "$\cdot$"*);

b) Dacă $a, b \in S$ cu $a \cdot b = a + b$, atunci $a \cdot b = b \cdot a$.

Revista de Matematică din Hunedoara

4. a) Fie $f : [0.1] \to [0, \infty)$ continuă, diferită de funcția nulă. Demonstrați că $\int_0^1 f(x)dx > 0$.

b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm funcțiile continue $f_1, f_2, \ldots, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\int_0^1 f_k^2(x)dx = \frac{2k-1}{n}$, pentru orice $k \in \{1, 2, 3 \ldots, n\}$. Demonstrați că există $\alpha \in [0,1]$ pentru care $f_1(\alpha) + f_2(\alpha) + \ldots. + f_n(\alpha) \leq n$.

Supliment Gazeta Matematică

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Faza Zonală - 17 februarie 2017

Clasa a XII-a - Bareme

1.	**a)** Elementul neutru este 3;	**.................1p**
	Elementele simetrizabile sunt 2 şi 4;	**.................2p**
	b) Se demonstrează că $\underbrace{x\circ x\circ x\circ\ldots\circ x}_{2017}=(x-3)^{2017}+3$;	**.................2p**
	Numerele reale căutate sunt 2, 3 şi 4.	**.................2p**
2.	**a)** Inegalitatea este echivalentă cu $\int_a^b (tf(x)+g(x))dx\geq 0$;	**.................2p**
	b) Avem $\Delta\leq 0$ și obținem cerința	**.................2p**
	c) $\left(\int_0^1 e^x\sqrt{x}dx\right)^2\leq\int_0^1 e^{2x}dx\cdot\int_0^1 xdx=\frac{e^2-1}{4}$ și finalizare.	**.................3p**
3.	**a)** ...	**.................4p**
	b) Avem $ab=a+b\Rightarrow ab-a-b+1=1\Rightarrow(a-1)(b-1)=1\overset{a)}{\Rightarrow}(b-1)(a-1)=1\Rightarrow ba=a+b$ și apoi concluzia.	**.................3p**
4.	**a)** Există cel puțin un punct $u\in[0,1]$ pentru care $f(u)>0$. Atunci există cel puțin un interval $[a,b]\subset[0,1]$ pentru care $f(x)>0$, pentru orice $x\in[a,b]$. Atunci $\int_0^1 f(x)dx\geq\int_a^b f(x)dx>0$.	**.................3p**
	b) Presupunem contrariul. Atunci $f_1(x)+f_2(x)+....+f_n(x)>n$, pentru orice $x\in[0,1]$. Dar $n\sum_{k=1}^n f_k^2(x)\geq\left(\sum_{k=1}^n f_k(x)\right)^2>n^2$, adică $\sum_{k=1}^n f_k^2(x)>n$. Folosind punctul precedent se obține $\sum_{k=1}^n\int_0^1 f_k^2(x)dx>n$, care contrazice ipoteza deoarece $\sum_{k=1}^n\int_0^1 f_k^2(x)dx=n$.	**.................4p**