Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici"
profil real-ştiinţe ale naturii, servicii, tehnologic
Faza locală - 17 februarie 2017

Clasa a X-a - barem de corectare

1.a)	Ridică la puterea 3-a egalitatea $\Rightarrow 17\sqrt{2}-11\sqrt{5}=(2a^3+15ab^2)\sqrt{2}+(6a^2b+5b^3)\sqrt{5}$	1p
	Se obține sistemul de ecuații $\begin{cases}2a^3+15ab^2=17\\6a^2b+5b^3=11\end{cases}$	1p
	Se obține $a=-1,\ b=1$.	2p
1.b)	Folosind punctul a) se observă că pentru $n=3$ se obține $\sqrt[3]{11\sqrt{5}+17\sqrt{2}}+\sqrt[3]{11\sqrt{5}-17\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^3}$, adică	2p
	pentru $n=3 \Rightarrow \sqrt[3]{11\sqrt{5}+17\sqrt{2}}+\sqrt[3]{11\sqrt{5}-17\sqrt{2}}=\sqrt{20}$.	1p
2.a)	a,b,c sunt în progresie geometrică dacă $b^2=ac$.	1p
	$\dfrac{\log_a x-\log_b x}{\log_a x}=\dfrac{\log_a x-2\log_{ac} x}{\log_a x}=1-2\log_{ac} a$	1p
	$\dfrac{\log_b x-\log_c x}{\log_c x}=\dfrac{2\log_{ac} x-\log_c x}{\log_c x}=2\log_{ac} c-1$	1p
	Arată că $1-2\log_{ac} a=2\log_{ac} c-1$.	1p
2.b)	Folosind inegalitatea mediilor se obține $$\left(\log_a bc\right)^3+\left(\log_b ac\right)^3+\left(\log_c ab\right)^3\ge 3\sqrt[3]{\left(\log_a bc\right)^3\cdot\left(\log_b ac\right)^3\cdot\left(\log_c ab\right)^3}\ge$$ $\ge 3\left(\log_a bc\right)\cdot\left(\log_b ac\right)\cdot\left(\log_c ab\right)=3\left(\log_a b+\log_a c\right)\cdot\left(\log_b a+\log_b c\right)\cdot\left(\log_c a+\log_c b\right)$	1p
	Se folosește inegalitatea mediilor pentru cei trei termeni: $\log_a b+\log_a c\ge 2\sqrt{\log_a b\cdot\log_a c}$ $\log_b a+\log_b c\ge 2\sqrt{\log_b a\cdot\log_b c}$ $\log_c a+\log_c b\ge 2\sqrt{\log_c a\cdot\log_c b}$ și se obține:	1p
	$\left(\log_a bc\right)^3+\left(\log_b ac\right)^3+\left(\log_c ab\right)^3\ge 3\cdot 2^3\sqrt{\log_a b\cdot\log_a c\cdot\log_b a\cdot\log_b c\cdot\log_c a\cdot\log_c b}=24$.	1p
3.a)	$x^2+4=(x-2i)(x+2i)$	1p
	$x^2-ix+2=(x-2i)(x+i)$	1p
	$f=\dfrac{x^2+9}{x^2-4ix-3}=\dfrac{(x-2i)(x+2i)}{(x-2i)(x+i)}=\dfrac{x+2i}{x+i}$.	1p
3.b)	Se folosește $Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow Z=\overline{Z}$ și $\lvert z_k\rvert=1\Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{1}{z}$. Atunci:	1p
	$\overline{Z}=\overline{\left(\dfrac{\left(z_1+z_2\right)\left(z_2+z_3\right)\cdot\ldots\cdot\left(z_n+z_1\right)}{z_1z_2z_3\ldots z_n}\right)}=\dfrac{\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)\left(\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\overline{z_n}+\overline{z_1}\right)}{\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}\ldots\overline{z_n}}$	2p
	$\overline{Z}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\dfrac{1}{z_n}+\dfrac{1}{z_1}\right)}{\dfrac{1}{z_1}\cdot\dfrac{1}{z_2}\cdot\dfrac{1}{z_3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{1}{z_n}}=\dfrac{\left(z_1+z_2\right)\left(z_2+z_3\right)\cdot\ldots\cdot\left(z_n+z_1\right)}{z_1z_2z_3\ldots z_n}=Z$.	1p
4.	Se observă $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1$	1p

	Se notează $\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x}}=t>0\Rightarrow t^{2}-34t+1\leq 0$ Se obțin soluțiile ecuației $t^{2}-34t+1=0$: $t_1=17+2\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x}}=17+2\sqrt{2}\Rightarrow x_1=4$ și $t_2=17-2\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x}}=17-2\sqrt{2}\Rightarrow x_1=-4$, de unde soluția inecuației $x\in\left[-4,4\right]$.	2p 2p 2p

NOTĂ: Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.