Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici"
profil real-ştiinţe ale naturii, tehnologic, servicii
Etapa locală - 17 februarie 2017

Clasa a IX-a

1. a) Demonstrați inegalitatea $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} \leq \dfrac{1}{2x}$, $\forall x \in (0,1)$;

b) Demonstrați că, dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in (0,1)$ astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$, atunci

$$\sqrt{\frac{a_2+a_3+...+a_n}{a_1}} + \sqrt{\frac{a_1+a_3+...+a_n}{a_2}} + ... + \sqrt{\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{a_n}} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right).$$

2. a) Determinați $x \in \mathbb{R}$, astfel încât numerele $x-3$, $\left[\dfrac{x+2}{3}\right]$, $4x$ să fie în progresie aritmetică.

($[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a)

b) Demonstrați inegalitatea: $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $\quad n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

3. Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{BP} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Demonstrați că punctele *M*, *N* și *P* sunt coliniare.

4. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și I centrul cercului inscris. Arătați că:

a) $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = (a+b+c)\overrightarrow{GI}$.

b) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.