Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 17 februarie 2017

Clasa a X-a - Enunţuri

1. Fie $u,v\in\mathbb{C}$ cu proprietatea $u+v=10$ şi $|u|=|v|=13$. Demonstraţi că $u^{2016}+v^{2016}\in\mathbb{R}$.

Supliment Gazeta Matematică

2. a) Demonstraţi că $\sin(\cos x)<\cos(\sin x)$, pentru orice $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Fie $a,b,c\in(0,1)$ cu proprietatea $a+b+c=1$. Demonstraţi că $\frac{\log_a b}{a+b}+\frac{\log_b c}{b+c}+\frac{\log_c a}{c+a}\geq\frac{9}{2}$.

Revista de Matematică din Hunedoara

3. a) Fie $f,g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ strict crescătoare. Demonstraţi că funcţia $f\cdot g$ este strict crescătoare;

b) Demonstraţi că funcţia $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}, h(x)=35^x-15^x-14^x+6^x$ este strict crescătoare;

c) Determinaţi toate soluţiile reale ale ecuaţiei $35^{x^2}+6^{x^2}=15^{x^2}+14^{x^2}+12$.

4. a) Demonstraţi că, pentru orice $z,w\in\mathbb{C}$ şi orice $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ cu $\alpha+\beta=1$, avem identitatea

$$|\alpha z+\beta w|^2=\alpha|z|^2+\beta|w|^2-\alpha\beta|z-w|^2;$$

b) Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $M\in(BC)$, $N\in(AC)$ şi $P\in(AB)$ astfel încât $\frac{MB}{MC}=\frac{NC}{NA}=\frac{PA}{PB}$.

Să se demonstreze că $AM^2+BN^2+CP^2\geq\frac{3}{4}\left(AB^2+AC^2+BC^2\right)$.

Revista de Matematică din Hunedoara

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Faza Zonală - 17 februarie 2017

Clasa a X-a - Bareme

1.	Notaţiile $u=a+bi$ și $v=c+di$ conduc la $a+c=10$ și $b+d=0$.	**.................2p**
	Din $\|u\|=\|v\|$, se obţine $a=c$, deci $v=\overline{u}$.	**..................3p**
	Finalizare.	**..................2p**
2.	**a)** Dacă $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, atunci $\sin x,\cos x\in[0,1]\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.	**.................1p**
	Avem $\sin(\cos x)<\cos(\sin x)\Leftrightarrow\sin(\cos x)<\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)\Leftrightarrow\cos x<\frac{\pi}{2}-\sin x$ $\Leftrightarrow\sin x+\cos x<\frac{\pi}{2}$, care este adevărat deoarece $\sin x+\cos x\le\sqrt{2}$ pentru orice $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.	**.................2p**
b)	Inegalitatea mediilor conduce la $\frac{\log_a b}{a+b}+\frac{\log_b c}{b+c}+\frac{\log_c a}{c+a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{\log_a b}{a+b}\cdot\frac{\log_b c}{b+c}\cdot\frac{\log_c a}{c+a}}=\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$	**.................2p**
	Dar $\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\le\frac{a+b+b+c+c+a}{3}=\frac{2}{3}$, de unde obţinem concluzia.	**..................2p**
3.	**a)** Se demonstrează.	**.................2p**
	b) Avem $h(x)=(7^x-3^x)\cdot(5^x-2^x)=35^x\cdot\left(\left(\frac{7}{3}\right)^x-1\right)\cdot\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x-1\right)$ şi se aplică punctul anterior.	**.................2p**
	c) Evident avem $x\ne 0$. Cu notaţia $x^2=y$, ecuaţia devine $h(y)=12$, cu $y>0$. Cum h e strict crescătoare, obţinem unica soluţie $y=1$. Atunci $x=1$ sau $x=-1$.	**..................3p**
4.	**a)** Verificare	**.................3p**
	b) Considerăm $A(z_A),B(z_B),C(z_C)$. Atunci $z_M=\frac{z_B+kz_C}{1+k}=(1-\alpha)z_B+\alpha z_C$ şi relaţiile analoage, unde k este valoarea comună a rapoartelor. Obţinem, din a), $AM^2=\alpha AB^2+(1-\alpha)AC^2-\alpha(1-\alpha)BC^2$	**..................2p**
	Obţinem $\sum AM^2=(\alpha^2-\alpha+1)\sum BC^2$	**..................1p**
	Demonstrăm inegalitatea $\alpha^2-\alpha+1\ge\frac{3}{4}$	**..................1p**

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro