Olimpiada de matematică
Faza Zonală - 17 februarie 2017

Clasa a XI-a - Bareme

1. **a)** Considerăm $f(x)=\det(A-xI_2)$, $x\in\mathbb{C}$. Avem imediat că $f(x)=x^2-(trA)x+(\det A)$. Deoarece $f(i)=\det A-1-i\cdot trA$ și $f(-i)=\det A-1+i\cdot trA$, rezultă că 4p

$x_2=\det(A^2+I_2)=\det(A-iI_2)\det(A+iI_2)=f(-i)f(i)=(\det A-1)^2+(trA)^2$, deci $x_2=(trA)^2$.

b) Avem $x_3=\det\left(A^3+I_2\right)\geq 0$. Atunci $x_3=x_1\cdot\det(A^2+A+I_2)$;

Cum $\det(A^2+A+I_2)=\det\left(\left(A+\frac{1}{2}I_2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_2\right)^2\right)\geq 0$, rezultă că $x_1\geq 0$. 3p

2. Din relația $A^2-Tr\left(A\right)A+\det\left(A\right)I_2=O_2$, se obține $A^2+\det\left(A\right)AA^{-1}=Tr\left(A\right)A$. Înmulțind cu

$\frac{1}{Tr\left(A\right)}A^{-1}$, obținem $\frac{1}{Tr\left(A\right)}\cdot A+\frac{\det(A)}{Tr\left(A\right)}\cdot A^{-1}=I_2$. 3p

Se demonstrează că $\frac{1}{Tr\left(A^{-1}\right)}=\frac{\det(A)}{Tr\left(A\right)}$. 4p

3. **a)** Se obține 0. ....3p

b) Se obține $a_n=e^{-n}$; 2p

Se obține $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{e-1}$. 3p

4. Prin inducţie matematică se obține faptul că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. 1p

$x_{n+1}-x_n=-x_n\left(x_n^{\ 2}-x_n+1\right)<0,\forall n\geq 1$, deci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător (2).

Din (1) și (2), avem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent, având limita $A\in\mathbb{R}$.

Prin trecere la limită în relaţia de recurenţă din enunţ se ajunge la $A=A^2-A^3\Rightarrow A=0$. 3p

Avem acum că $y_n=\frac{1}{x_n}\to+\infty$ și astfel $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{y_n}\overset{not.}{=}B$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{x_n}x_{n+1}}{\cancel{x_n}(1-x_n+x_n^{\ 2})}=0.$$

Criteriul Cesaro-Stolz conduce la $B=\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=0=A$. 3p

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro