Olimpiada de matematică
Faza Zonală - 17 februarie 2017

Clasa a IX-a - Enunţuri

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu termeni întregi. Se ştie că printre termenii acestei progresii găsim exact trei pătrate perfecte. Suplimentar, aceste pătrate perfecte sunt consecutive.
a) Demonstraţi că raţia progresiei este negativă;
b) Determinaţi pe a_1.

Supliment Gazeta Matematică

2. **a)** Demonstraţi că oricare ar fi $x, y > 0$, are loc inegalitatea $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$;

b) Fie $a, b, c > 0$ cu proprietatea $a + b + c = 2017$. Demonstraţi că $\frac{a^3 + b^3}{ab} + \frac{b^3 + c^3}{bc} + \frac{c^3 + a^3}{ca} \geq 4034$.

3. Fie $r \geq 0$. Pentru orice numerele reale a, b, definim mulţimea

$$I(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \| x - a| + |x - b| \leq r\}$$

a) Dacă $r < |a - b|$, demonstraţi că $I(a,b) = \varnothing$;
b) Dacă $r \geq |a - b| > 0$, demonstraţi că $I(a,b)$ este un interval închis şi mărginit lungime r;
c) Mulţimea $I(a,b)$ conţine un singur element dacă şi numai dacă $a = b$ şi $r = 0$.

Revista de Matematică din Hunedoara

4. Într-un plan α, se consideră punctele distincte A, B, C, D. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) Avem $C, D \in [AB]$, iar segmentele $[AB]$ şi $[CD]$ au acelaşi mijloc;
b) Pentru orice $M \in \alpha$, avem $MA + MB \geq MC + MD$.

Gazeta Matematică

NOTĂ
- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Faza Zonală - 17 februarie 2017

Clasa a IX-a - Bareme

1. **a)** Fie r, raţia progresiei şi a_k, a_l, a_m, cele trei pătrate perfecte. Există $x \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea $a_k = x^2$, $a_l = (x+1)^2$ şi $a_m = (x+2)^2$ 1p

Avem $r | a_l - a_k \Rightarrow r | 2x+1$ şi $r | a_l - a_k \Rightarrow r | 2x+3$. Atunci r este impar şi $r | (2x+3)-(2x+1)$, deci $r = \pm 1$. 2p

Dacă $r=1$. atunci progresia va conține mai mult de trei pătrate perfecte, deci $r = -1 < 0$. 2p

b) Se obţine $a_1 = 4$. 2p

2. **a)** Demonstraţie 3p

b) Avem $\dfrac{a^3+b^3}{ab} = \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a} \ge a+b$. 2p

Scriem analoagele şi însumăm. 2p

3. **a)** Avem $|x-a|+|x-b| = |x-a|+|b-x| \ge |a-b| > r$ de unde obţinem concluzia. 2p

b) Presupunem $a<b$. Se analizează cazurile $x<a$, $x \in [a,b]$ şi $x>b$ care conduc la $I(a,b) = \left[\dfrac{a+b-r}{2}, \dfrac{a+b+r}{2}\right]$ şi apoi concluzia este evidentă. 3p

c) Dacă $a=b$ şi $r=0$ atunci $I(a,b) = \{a\}$. 1p

Presupunerea $r>0$ conduce la contradicţie pe baza punctelor anterioare. 1p

4. **(a)** $\Rightarrow$ **(b)** Avem $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DB}{DA} = k$. Atunci $\overrightarrow{MC} = \dfrac{\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}}{1+k}$, de unde $MC \le \dfrac{1}{k+1}MA + \dfrac{k}{k+1}MB$. Analog $MD \le \dfrac{k}{k+1}MA + \dfrac{1}{k+1}MB$, iar prin însumare obţinem concluzia. 3p

(b) $\Rightarrow$ **(a)** Pentru $M=A$ obţinem $AB \ge AC+AD$, iar pentru $M=B$ obţinem $AB \ge BC+BD$. Prin adunare, avem $2AB \ge AC+AD+BC+BD$, Dar $AD+BD \ge AB$ şi $AC+BC \ge AB$, de unde deducem că $AC+AD+BC+BD = 2AB$, de unde $AD+BD=AB$ şi $AC+BC=AB$. Obţinem $C, D \in [AB]$. 2p

Pe de altă parte, din $AB \ge AC+AD$, obţinem $AC+CB \ge AC+AD$, de unde $BC \ge AD$. Apoi $AB \ge BC+BD$ conduce la $AD+DB \ge BC+BD$, de unde $AD \ge BC$. Concluzia este că $AD=BC$, care este echivalent cu concluzia. 2p

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro