Barem clasa a VII

1. Se dă proporția $\frac{x-3}{y}=\frac{x}{y+4}$ cu $x>3$ și $y>0$. Arătați că $\frac{x}{y}>\sqrt{3}-1$.

(Prelucrare supliment GM 11/2016)

Soluție

$\frac{x-3}{y}=\frac{x}{y+4} \Rightarrow (x-3)(y+4)=xy \Rightarrow xy+4x-3y-12=xy \Rightarrow 4x=3y+12 \Rightarrow$ **3 p**

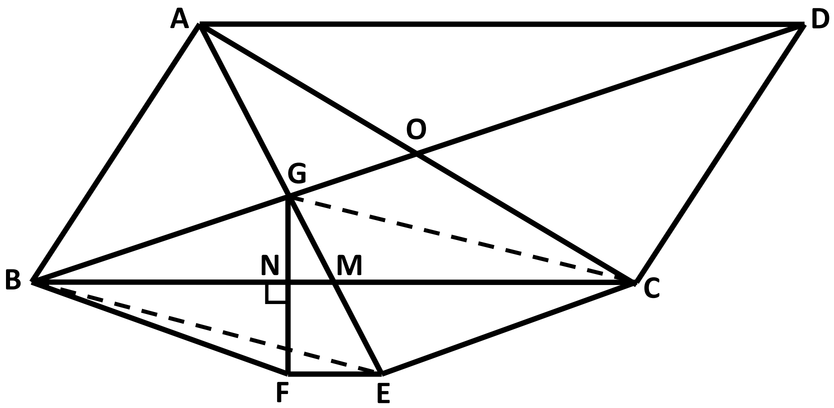
$\Rightarrow 4x>3y \left|\cdot\frac{1}{4}\right. \Rightarrow x>\frac{3}{4}\cdot y \left|\cdot\frac{1}{y}\right.$ (care este pozitiv) $\Rightarrow \frac{x}{y}>\frac{3}{4}$ **3 p**

$\frac{3}{4}>\sqrt{3}-1 \left|+1\right. \Leftrightarrow \frac{7}{4}>\sqrt{3} \left|\cdot 4\right. \Leftrightarrow 7>4\sqrt{3} \left|(\ )^2\right. \Leftrightarrow 49>48$ adevărat. Deci $\frac{x}{y}>\frac{3}{4}>\sqrt{3}-1$ **1 p**

2. Fie paralelogramul $ABCD$, M mijlocul laturii $[BC]$ și $\{G\}=AM\cap BD$

a) Arătați că $AG=2\cdot GM$

b) Fie E și F simetricele punctului G față de punctul M, respectiv față de dreapta BC. Arătați că $BCEF$ este trapez isoscel.



Soluție

a) În ΔABC, AM și BO sunt mediane $\Rightarrow$ G este centrul de greutate al ΔABC **1 p**

$\Rightarrow AG=\frac{2}{3}AM$ și $GM=\frac{1}{3}AM \Rightarrow AG=2\cdot GM$ **1 p**

b) NM linie mijlocie în $\Delta GEF \Rightarrow NM \parallel FE \Rightarrow FE \parallel BC$ **1 p**

$[BC]$ și $[GE]$ se înjumătățesc $\Rightarrow$ $BECG$ paralelogram $\Rightarrow [BG]\equiv[CE]$ **2 p**

$[BN]$ mediatoarea lui $[GF] \Rightarrow [BG]\equiv[BF]$. În concluzie $[BF]\equiv[CE]$ **2 p**

3. Fie numerele întregi $a_1,a_2,a_3,....,a_{40}$ astfel încât $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot.....\cdot a_{40}=1$ și suma $S=a_1+a_2+a_3+.....+a_{40}$.

a) Arătați că $S \vdots 2$

b) Arătați că $S \vdots 4$

c) Aflați valoarea minimă a expresiei $E=a_1a_2a_3+a_2a_3a_4+.....+a_{38}a_{39}a_{40}+a_{39}a_{40}a_1+a_{40}a_1a_2$

Soluție

a) Există un număr par de factori de -1 și, prin urmare, un număr par de factori de 1. Fie $2k$ numărul factorilor de -1 și $2p$ numărul factorilor de $1 \Rightarrow S=-2k+2p=2\cdot(p-k)\vdots 2$ **2 p**

b) $\left.\begin{array}{r} 2k+2p=40 \Rightarrow k+p=20 \text{ este număr par} \\ 2k \text{ este număr par}\end{array}\right\} \Rightarrow k+p-2k=p-k$ este număr par **2 p**

c) Valoarea minimă este -38 și este atinsă când avem succesiunea

$\underbrace{-1,1,1}_{1},\underbrace{-1,1,1}_{2},\underbrace{-1,1,1}_{3},.....,\underbrace{-1,1,1}_{13},-1$ **3 p**

4. Fie ΔABC cu $AB = BC = 10$ cm și $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$. Se consideră punctul G în interiorul triunghiului ABC astfel încât $m(\widehat{GAB}) = m(\widehat{GCB}) < 22^\circ$

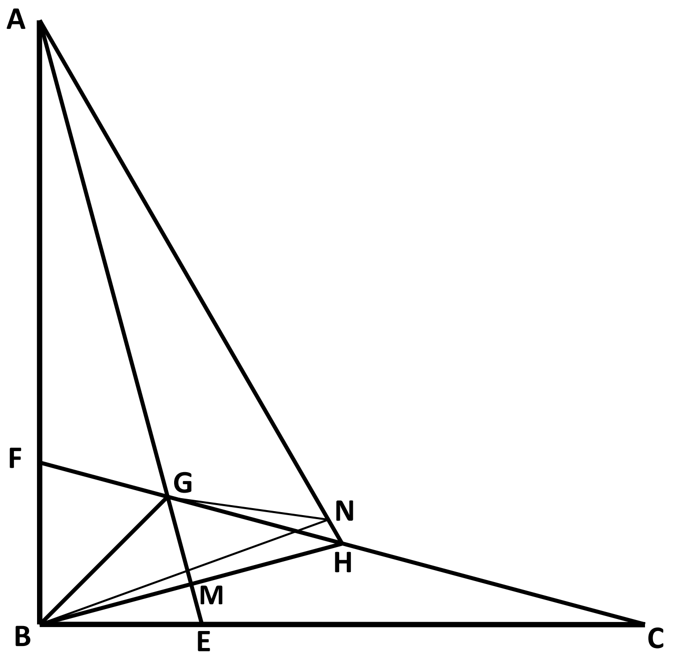
a) Arătați că $[BG$ este bisectoarea unghiului ABC.

b) Fie $H \in (GC)$ astfel încât $[AG$ este bisectoarea unghiului BAH.

Arătați că, dacă $[AH] \equiv [AB]$ atunci $m(\widehat{GAB}) = 15^\circ$.

c) Arătați că, dacă $m(\widehat{GAB}) = 15^\circ$ atunci $[AH] \equiv [AB]$.

Soluție



a) $AG \cap BC = \{E\}$, $CG \cap AB = \{F\}$

$\Delta ABE \equiv \Delta CBF \ (ULU) \Rightarrow BE = BF \Rightarrow CE = AF$

$\Delta AFG \equiv \Delta CEG \ (LUU) \Rightarrow FG = EG$

$\Delta BFG \equiv \Delta BEG \ (LLL) \Rightarrow \widehat{FBG} \equiv \widehat{EBG}$ **3 p**

b)

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABH \text{ isoscel cu } AM \text{ bisectoare } \Rightarrow AM \perp BH \text{ si } \widehat{BGM} \equiv \widehat{HGM} \\ \Delta BFG \equiv \Delta BEG \ (LLL) \Rightarrow \widehat{BGM} \equiv \widehat{BGF} \\ m(\widehat{BGM}) + m(\widehat{BGF}) + m(\widehat{HGM}) = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$m(\widehat{BGM}) = m(\widehat{BGF}) = m(\widehat{HGM}) = 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{BAM}) = 15^\circ$ **2 p**

c)

Presupunem, prin reducere la absurd că $[AH] \not\equiv [AB]$.

Atunci există un alt punct $N \in AH$ astfel încât $[AN] \equiv [AB]$.

În ΔBCF avem $m(\widehat{BFC}) = 75^\circ$. În plus $m(\widehat{BGF}) = m(\widehat{BGM}) = 60^\circ$.

$[AN] \equiv [AB] \Rightarrow m(\widehat{BGM}) = m(\widehat{MGN}) = 60^\circ$. Deci $m(\widehat{FGN}) = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow F, G, N$ coliniare, contradicție. **2 p**