Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil real- ştiinţe ale naturii, servicii, tehnologic
Faza locală - 17 februarie 2017

Clasa a XI-a - barem de corectare

1.a)	Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Q})$. Din $AX=XA\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 4a+3c & 4b+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a+4b & 2a+3b \\ 3c+4d & 2c+3d\end{pmatrix}$ se obține $c=2b,\ d=a$. Deci $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{Q}\Rightarrow X\in M$.	1p 1p 1p
1.b)	Fie X o soluție a ecuației date. Din $A=X^2\Rightarrow AX=X^3=X\cdot X^2=XA$ rezultă $X\in M\Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a\end{pmatrix}\in M$ Calcul pentru $X^2=\begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab \\ 4ab & a^2+2b^2\end{pmatrix}$ și din $X^2=A$ se obține $\begin{cases} a^2+2b^2=3 \\ ab=1\end{cases}$, de unde $a^2-3ab+2b^2=0\Leftrightarrow(a-b)(a-2b)=0$ Dacă $a=b\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=b=1$ sau $a=b=-1$ Dacă $a=2b\Rightarrow 2b^2=1\Rightarrow b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ și $a=\pm\sqrt{2}$ Soluțiile sunt $X_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1\end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$ și $X_4=\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$.	1p 2p 1p
2.a)	Se calculează $D(a,b)=\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2\end{vmatrix}=(a^2+ab+b^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2\end{vmatrix}=(a^2+ab+b^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^2 & a^2-b^2 & ab-b^2 \\ ab & b^2-ab & a^2-ab\end{vmatrix}$ $=(a^2+ab+b^2)^2(a-b)^2=(a^3-b^3)^2=2017$.	2p 2p
2.b)	Din a) se obține $D(p,q)+D(q,r)+D(r,p)=(p^3-q^3)^2+(q^3-r^3)^2+(r^3-p^3)^2$ $(p^3-q^3)^2+(q^3-r^3)^2+(r^3-p^3)^2=0\Leftrightarrow p=q=r=0$.	1p 2p
3.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[k]{\cos kx}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{x^2(1+\sqrt[k]{\cos kx}+\sqrt[k]{\cos^2 kx}+...+\sqrt[k]{\cos^{k-1}kx})}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{kx}{2}}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[k]{\cos kx}+\sqrt[k]{\cos^2 kx}+...+\sqrt[k]{\cos^{k-1}kx}}=\frac{k}{2}$.	2p 2p
3.b)	$l_2=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{\cos 2x}\right)\left(1-\sqrt[3]{\cos 3x}\right)...\left(1-\sqrt[n]{\cos nx}\right)}{x^{2n-2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}...\frac{1-\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}=$ $=\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot...\cdot\frac{n}{2}=\frac{n!}{2^{n-1}}$.	2p 1p

4.a)	$D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$. Se obține $x=-\frac{3}{2}$ asimptotă vertical bilaterală	2p
4.b)	Din $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+1}{2x^2+3x}=2$ și $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=-3$ se obține $a=4,\ b=0$.	2p 2p 1p

NOTĂ: Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.