Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici"
profil real-ştiinţe ale naturii, servicii, tehnologic
Etapa locală - 17 februarie 2017

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea $G=(2,\infty)$ se definește legea de compoziție
$x\circ y=xy-2x-2y+6,\quad (\forall)x,y\in(2,\infty)$.

a) Arătați că $(G,\circ)$ este grup abelian.

b) Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:(0,\infty)\to G,\ f(x)=ax+b$ sa fie izomorfism între grupurile $((0,\infty),\cdot)$ și $(G,\circ)$.

c) Rezolvați în mulțimea G ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{2017\ ori}=3^{2017}+2$.

2. Fie mulțimea $G=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}1+5a & 15a\\ -a & 1-3a\end{pmatrix}\middle|\, a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right\}$.

a) Demonstrați că G este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor.

b) Determinați $\begin{pmatrix}11 & 30\\ -2 & -5\end{pmatrix}^{2017}$.

3. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{x^n}{e^x},\ n\in\mathbb{N}$.

a) Calculați $\int(f_0(x)-f_1(x))dx$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f_{2017} este convexă pe intervalul $(-\infty,0)$.

4. a) Calculați $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

b) Demonstrați că: $\frac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2k}}}<\frac{\pi}{3},\ (\forall)k\in\mathbb{N}^*$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.