Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 17 februarie 2017

Clasa a XI-a

1. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se notează $x_n = \det\left(A^n + I_2\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că:

a) Dacă $\det A = 1$, atunci x_2 este pătrat perfect;

b) Dacă $x_3 \geq 0$ atunci $x_1 \geq 0$.

Supliment Gazeta Matematică

2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă cu urma $Tr(A)$ nenulă. Demonstrați că

$$\frac{1}{Tr(A)} \cdot A + \frac{1}{Tr\left(A^{-1}\right)} \cdot A^{-1} = I_2.$$

Revista de Matematică din Hunedoara

3. a) Calculaţi: $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$;

b) Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $a_n = \lim\limits_{x \to 0}\left(1 - x \cdot \sin nx\right)^{\frac{1}{x^2}}$. Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

4. Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 \in (0,1)$ şi $x_{n+1} = x_n^{\ 2}(1 - x_n)$, $\forall n \geq 1$. Demonstraţi că şirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ şi $(n \cdot x_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente, având aceeaşi limită.

Supliment Gazeta Matematică

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
Fax: +4 (0) 254215034, +4 (0) 254220911
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro