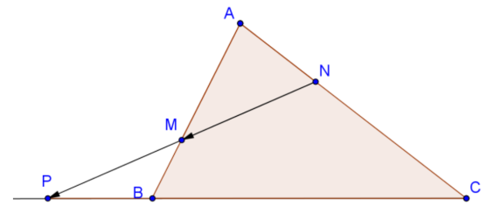
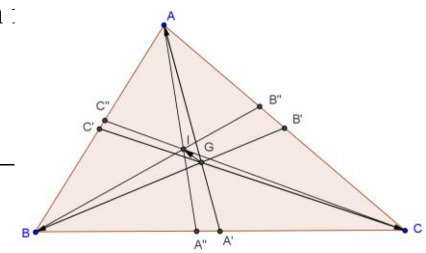
Concursul de matematică aplicată “Adolf Haimovici”
profil real-ştiinţe ale naturii, tehnologic, servicii
Faza locală - 17 februarie 2017

Clasa a IX-a - barem de corectare

1. a)	Prin ridicare la pătrat se obține $\frac{1-x}{x}\le\left(\frac{1}{2x}\right)^2$, adică $\frac{1-x}{x}\le\frac{1}{4x^2}\Leftrightarrow 0\le\frac{1}{4x^2}-\frac{1-x}{x}$. Aduce la același numitor și obține $0\le\frac{1}{4x^2}-\frac{4x-4x^2}{4x^2}\Leftrightarrow\frac{4x^2-4x+1}{4x^2}\ge 0$, adică $\frac{(2x-1)^2}{4x^2}\ge 0$, evident.	1p 1p 1p
1.b)	Observă că $\sqrt{\frac{a_2+a_3+...+a_n}{a_1}}=\sqrt{\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n-a_1}{a_1}}=\sqrt{\frac{1-a_1}{a_1}}$ $\sqrt{\frac{a_1+a_3+...+a_n}{a_2}}=\sqrt{\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n-a_2}{a_2}}=\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2}}$ ... $\sqrt{\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{a_n}}=\sqrt{\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n-a_n}{a_n}}=\sqrt{\frac{1-a_n}{a_n}}$ Adună cele n relații și se obține $\sqrt{\frac{a_2+a_3+...+a_n}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_1+a_3+...+a_n}{a_2}}+...+\sqrt{\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{a_n}}=\sqrt{\frac{1-a_1}{a_1}}+\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2}}+...+\sqrt{\frac{1-a_n}{a_n}}<$ $<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)$, folosindu-se de a).	2p 1p 1p
2.a)	Numerele $x-3, \left[\frac{x+2}{3}\right], 4x$ sunt în progresie aritmetică dacă $\left[\frac{x+2}{3}\right]=\frac{5x-3}{2}=k\in\mathbb{Z}$. Rezolvă ecuația și obține $x\in\left\{\frac{3}{5},1\right\}$.	1p 2p
2.b)	Inducție matematică: Pentru $n=2\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}<3$ adevărată. Pp. $p(k)$: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}$ adevărată $p(k)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ adevărată.. Pentru a demonstra că $p(k+1)$ este adevărată, arată că $2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$ prin înmulțirea acestei inegalități cu $\sqrt{k+1}>0$	1p 2p 1p

3.	*Scrie vectorii* $\overrightarrow{NM}$ *și* $\overrightarrow{NP}$ *în aceiași bază, de exemplu* $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$*:* $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ***și*** $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$. *Din* $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ *rezultă* $\overrightarrow{NP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{4}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. *Observă că* $\overrightarrow{NP}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=2\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=2\overrightarrow{NM}$, *deci* $\overrightarrow{NM}$ *și* $\overrightarrow{NP}$ *sunt vectori coliniari, adică punctele* N,M,P *sunt coliniare*  	3p 2p 2p
4.a)	Avem $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GA}$, înmulțim cu a şi se obţine $a\overrightarrow{IA}=a\overrightarrow{IG}+a\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GB}$, înmulţim cu b şi se obţine $b\overrightarrow{IB}=b\overrightarrow{IG}+b\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GC}$, înmulţim cu c şi se obţine $c\overrightarrow{IC}=c\overrightarrow{IG}+c\overrightarrow{GC}$. Adunând cele trei egalităţi obţinute rezultă $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=(a+b+c)\overrightarrow{IG}+a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, unde s-a Deci $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=(a+b+c)\overrightarrow{GI}$.  	2p 1p 1p
4.b)	Foloseşte relaţia lui Leibniz pentru triunghiul ABC: $(\forall)P\in(ABC)\Rightarrow\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}$ pentru $P\equiv I$ $\Rightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IG}$.	2p 1p

NOTĂ: Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.