Concursul de matematică aplicată "Adolf Haimovici"
profil real-ştiinţe ale naturii, servicii, tehnologic
Etapa locală - 17 februarie 2017

Clasa a XI-a

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Arătați că, dacă $X\in M_2(\mathbb{R})$ și $AX=XA$, atunci $X\in M$.

b) Rezolvați ecuația $X^2=A,\ X\in M_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră determinantul $D(a,\,b)=\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $D(a,b)$ știind că $a^3-b^3=\sqrt{2017}$.

b) Demonstrați că $D(p,q)+D(q,r)+D(r,p)=0$ dacă și numai dacă $p=q=r,\ \ (\forall)p,q,r\in\mathbb{R}$.

3. a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[k]{\cos kx}}{x^2}=\dfrac{k}{2},\ k\in\mathbb{N},\ k\geq 2$.

b) Calculați limita $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\sqrt{\cos 2x}\right)\left(1-\sqrt[3]{\cos 3x}\right)...\left(1-\sqrt[n]{\cos nx}\right)}{x^{2n-2}}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

4. Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{2x+3}$.

a) Determinați ecuația asimptotei verticale.

b) Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției să admită asimptota oblică $y=2x-3$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.