OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
BAREM DE CORECTARE
clasa a XI-a
Etapa locală, februarie 2017

1) a) Se adună celelalte linii la prima linie și se scoate $(n-2)$ factor comun .... 2p.

Se scade prima coloană din celelalte și rezultă că determinantul este egal cu $(n-2)\cdot(-2)^{n-1}$ 2p

b) Se adună prima coloană la celelalte coloane. Elementele care se obțin sunt:

$$\left.\begin{array}{r} 1+1=2 \\ 1-1=0 \\ -1+1=0 \\ -1-1=-2 \end{array}\right\}$$ divizibile cu 2 2p

....

Se scoate 2 factor comun de pe fiecare coloană mai puțin de pe coloana întâi 1p

2) $A(X+Y)=X^2-Y^2=(X-Y)(X+Y)$ 2p

Deci $A=X-Y$

....

$X=\frac{1}{2}(I_n+A)$, 2p

$Y=\frac{1}{2}(I_n-A)$ ....

$AX=X^2 \Leftrightarrow (X-Y)X=X^2 \Leftrightarrow YX=0_n$ 1p
....

$YX=0_n \Rightarrow \frac{1}{4}(I_n-A^2)=0_n \Rightarrow A^2=I_n$ .... 1p.
....

$A^{2017}=-I_n \Rightarrow A=-I_n$

....

1p

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=\frac{a}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}$ 4p

$\frac{bx^2+x}{x+1}=\begin{cases}1, b=0\\ \pm\infty, b\neq 0\end{cases}$ ....

Dacă $a\neq 2$, limita cerută este e pentru $b=0$ și $a=2e$ 1p

....

Dacă $a=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)^{\frac{bx^2+x}{x+1}}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\sqrt{x^2+2x}-x-1\right)^{\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}-x-1}}\right]^{-\frac{bx^2+x}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x}+x+1\right)}}$ 2p

este e pentru $b=-2$

....

4) $\frac{1+a_n}{2}\leq\frac{1+a_{n+1}}{2}\Rightarrow a_n\leq a_{n+1}$, $n\in\boldsymbol{N}^*$, adică $(a_n)_{n\in N^*}$ este crescător 2p

Deci și $a_{n+1}\leq a_{2n}\leq\frac{1+a_{n+1}}{2}$, de unde rezultă $a_{n+1}\leq 1$, $n\in\boldsymbol{N}^*$, adică $a_n\leq 1$, $n\geq 2$.

Deci șirul $(a_n)_n$ este mărginit superior 2p

....

Așadar există $a\in(a_1,1]$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}$ 1p

$a_n=a$ ....

Trecem la limită în relația din enunț și rezultă că $\frac{1+a}{2}\leq a\leq\frac{1+a}{2}$, 1p

adică a=1.............

Exemplu $a_n=1-\frac{1}{n}$, $n\in\boldsymbol{N}^*$ 1p

....