OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 26. 02. 2017

Clasa a- XI- a

1) a) Să se calculeze determinantul de ordin n, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots -1 \end{vmatrix}$$

b) Să se demonstreze că dacă o matrice pătratică de ordinul n, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$ este formată cu elemente egale fiecare cu 1 sau -1 atunci determinantul său se divide cu 2^{n-1}.

2) Fie $n \geq 2$ un număr natural. Să se determine toate matricele $A \in M_n(\boldsymbol{C})$ cu $A^{2017} = -\mathrm{I}_n$ pentru care există $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in M_n(\boldsymbol{C})$ care comută și verifică $\mathrm{X} + \mathrm{Y} = \mathrm{I}_n$, $\mathrm{AX} = \mathrm{X}^2$ și $\mathrm{AY} = -\mathrm{Y}^2$.

3) Determinați numerele reale $a \geq 0$ și b pentru care $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - x\right)^{\frac{bx^2 + x}{x+1}} = \mathrm{e}$.

4) Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$.

Dacă pentru orice $n \in \boldsymbol{N}^*$, $\frac{1 + a_n}{2} \leq a_{2n} \leq \frac{1 + a_{n+1}}{2}$, atunci $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = 1$. Să se dea un exemplu de șir cu proprietatea menționată.

1Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
2Toate problemele sunt obligatorii;
3Fiecare problemă se notează de la 0 la 7