



Olimpiada de Matematică

Faza locală

Clasa a XII -a

BAREME

Subiectul I.

Fie $G = \{A_1 A_2 \dots A_n\} \subset M_p(C)$ astfel încât (G, \cdot) este grup față de operația de înmulțire a matricilor.

Arătați că $(\sum_{k=1}^n A_k)^2 = n \sum_{k=1}^n A_k$

Rezolvare :

Din (G, \cdot) = grup în tabla CAYLEY. Pe fiecare linie (coloană) fiecare element apare o singură dată. (2p)

Așadar: (1p)

\cdot	A_1	A_2	A_3	...	A_n
A_1	$A_1 A_1$	$A_1 A_2$	$A_1 A_3$		$A_1 A_n$
A_2	$A_2 A_1$	$A_2 A_2$	$A_2 A_3$		$A_2 A_n$
A_3	$A_3 A_1$	$A_3 A_2$	$A_3 A_3$		$A_3 A_n$
...					...
A_n	$A_n A_1$	$A_n A_2$	$A_n A_3$...	$A_n A_n$

Deci adunând elementele tablei pe linii de exemplu se obține

$$A_1(A_1 + A_2 + \dots A_n) = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

$$A_2(A_1 + A_2 + \dots A_n) = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

....

(2p)

$$A_n(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Se dă factor comun la stânga și se ține cont ca "+" este comutativă. Sumând relațiile anterioare se obține:

$$(A_1 + A_2 + \dots + A_n)^2 = n(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \quad (2p)$$

Subiectul II.

Calculați $\int \frac{x^2+2x+7}{(x+1)^4} \sin x \, dx; x > 0$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x + 7}{(x + 1)^4} \sin x \, dx &= \int \frac{(x + 1)^2 + 6}{(x + 1)^4} \sin x \, dx = \int \frac{\sin x}{(x + 1)^2} \, dx \\ &+ 6 \int \frac{1}{(x + 1)^4} \sin x \, dx = \int \frac{\sin x}{(x + 1)^2} \, dx + \\ &+ 6 \int \left(\frac{(x + 1)^{-3}}{-3} \right) \sin x \, dx = \int \frac{\sin x}{(x + 1)^2} \, dx \\ &+ 6 \left(\frac{(x + 1)^{-3}}{-3} \sin x - \int \left(\frac{(x + 1)^{-3}}{-3} \right) \cos x \, dx \right) \\ &= \int \frac{\sin x}{(x + 1)^2} \, dx - \frac{2 \sin x}{(x + 1)^3} + 2 \int (x + 1)^{-3} \cos x \, dx = \\ &\int \frac{\sin x}{(x + 1)^2} \, dx - \frac{2 \sin x}{(x + 1)^3} + 2 \int \left(\frac{(x + 1)^{-2}}{-2} \right) \cos x \, dx = \int \frac{\sin x}{(x + 1)^2} \, dx \\ &- \frac{2 \sin x}{(x + 1)^3} + 2 \left(\left(\frac{(x + 1)^{-2}}{-2} \right) \cos x + \int \left(\frac{(x + 1)^{-2}}{-2} \right) \sin x \, dx \right) \\ &= \int \frac{\sin x}{(x + 1)^2} \, dx - \frac{2 \sin x}{(x + 1)^3} - \frac{\cos x}{(x + 1)^2} - \int \frac{\sin x}{(x + 1)^2} \, dx \\ \text{Deci} &= -\frac{2 \sin x}{(x + 1)^3} - \frac{\cos x}{(x + 1)^2} + C \quad (7p) \end{aligned}$$

Subiectul III.

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continuă și strict crescătoare (pe $[a, b]$)

$$1. \text{ Arătați că dacă } f(b) < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f^n(x) \, dx = 0$$

2. Dacă $f(b)=1$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f^n(x) dx = 0$

1. Avem $f(a) \leq f(x) \leq f(b) \ (\forall) x \in [a, b] \Rightarrow f(a)^n \leq f(x)^n \leq f(b)^n$,
 $(\forall) x \in [a, b]$,

$$\Rightarrow f(a)^n(b-a) \leq \int_a^b f^n(x) dx \leq f(b)^n(b-a)$$

$(\forall) x \in [a, b]$ și $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Cum } 0 \leq f(a) < f(b) < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(b) = 0 \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f^n(x) dx = 0 \quad (2p)$$

2. Fie $p \in \mathbb{N}, p > \frac{1}{b-a}$

$$\text{Atunci } \int_a^b f^n(x) dx = \int_a^{b-\frac{1}{p}} f^n(x) dx + \int_{b-\frac{1}{p}}^b f^n(x) dx \\ \leq f^n\left(b - \frac{1}{p}\right) \left(b - a - \frac{1}{p}\right) + f^n(b) \cdot \frac{1}{p} \quad (2p)$$

$$\text{Deci } 0 \leq \int_a^b f^n(x) dx \leq f^n\left(b - \frac{1}{p}\right) \left(b - a - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}$$

$$\text{Trecând la limita după } n \rightarrow \infty \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f^n(x) dx \leq \frac{1}{p}, (\forall) p \in \mathbb{N}^* \quad (1p)$$

$$p > \frac{1}{b-a}$$

$$\text{Trecând apoi la limita după } p \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f^n(x) dx = 0 \quad (2p)$$

Subiectul IV.

Fie $(A, +, \cdot)$ inel finit cu $3n$ elemente cu $n \geq 3$, impar.

Notăm: $B = \{a \in A; (\exists) k \in \mathbb{N}^* a. \hat{a}. a^k = 0\}$. Arătați că $\text{ord} B \leq n$

$$\text{Fie } a, b \in B \Rightarrow (\exists) k, p \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } a^k = 0, b^p = 0 \quad (1p)$$

$$(a + b)^{k+p} = C_{k+p}^0 a^{k+p} + C_{k+p}^1 a^{k+p-1} b^1 + \dots + C_{k+p}^{k+p} b^{k+p} = 0 \quad (2p)$$

$$a + b \in B \Rightarrow B = p.s. \text{ în raport cu } " + " \} = 1$$

$$B \subset A \quad (2p)$$

$$(B, +) \leq (A, +), 1 \notin B \Rightarrow (B, +) \text{ subgrup propriu al lui } (A, +)$$

$$\Rightarrow \text{ord } B : 3n \Rightarrow \text{ord } B \leq n \quad (2p)$$