OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 26. 02. 2017

Clasa a- IX- a

1. Demonstraţi că:

a) $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$, $\forall a,b \in R$, $\forall x,y>0$;

b) $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, $\forall a,b,c \in R$, $\forall x,y,z>0$;

c) Dacă x,y,z sunt numere reale nenule care verifică relaţia

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=\frac{35}{x+y+z},$$

atunci x,y,z nu pot avea toate acelaşi semn.

2 Determinaţi valoarea minimă şi valoarea maximă a expresiei $E(x)=\frac{x}{x^2+2x+2}$, unde x este un număr real.

3. Determinaţi valorile naturale ale lui n pentru care cel puţin două dintre numerele $\left[\sqrt{n^2+1}\right], \left[\sqrt{n^2+5}\right], \left[\sqrt{n^2+9}\right] \dots, \left[\sqrt{n^2+2017}\right]$ sunt egale, unde am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.

4. Fie $ABCD$ un paralelogram în care avem M este mijlocul lui $[BC]$, N este mijlocul lui $[AM]$ şi $DN \cap AC=\{P\}$. Calculaţi raportul $\frac{AP}{PC}$.

1Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

2Toate problemele sunt obligatorii;

3Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.