MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GORJ

BAREME-SOLUŢII-PROBLEME
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-CLASA a VII-a-26 ,FEBRUARIE 2017

1.Să se determine cifrele a şi b (din baza 10) ştiind că numărul raţional $r = \overline{a,1(b)} + \overline{b,2(a)}$ se poate scrie sub formă de fracţie zecimală finită.

1.Rezolvare:

Avem $r = \overline{a,1(b)} + \overline{b,2(a)} = \frac{\overline{a1b}-\overline{a1}}{90} + \frac{\overline{b2a}-\overline{b2}}{90} = \frac{100a+10+b-10a-1+100b+20+a-10b-2}{90} = \frac{91a+91b+27}{90}$ **3p**

r este fracție zecimală finită $\Longrightarrow 9|(91a+91b+27) \Rightarrow 9|91(a+b) \Longrightarrow 9|(a+b)$ **1p**

Dar $a,b\epsilon\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\} \Rightarrow 0 \le a+b \le 16$ **1p**

a+b=0 sau a+b=9⇒ (a;b) ∈ {(0;0) ; (1;8) ; (2;7) ; (3;6) ; (4;5) ; (5;4) ; (6;3) ; (7;2) ; (8;1)} **2p**

2. a) Arătați că: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{2017^2} < \frac{2016}{2017}$.

b) Arătați că oricare ar fi numărul real x are loc inegalitatea:
$|x-1^2| + |x-2^2| + |x-3^2| + \cdots |x-2017^2| \ge |x - 2017 \cdot 1009|$.

2. Rezolvare:

a) Folosim: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$ **1p**

$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}$

$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}$

....

$\frac{1}{2017^2} < \frac{1}{2016 \cdot 2017}$

Obținem: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2017^2} < \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \cdots + \frac{1}{2016\cdot2017}$ **2p**

Avem:$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2017^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}$

Deci, $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{2017^2} < \frac{2016}{2017}$ **1p**

b)Folosim inegalitatea: $|a| + |b| \ge |a-b|$ **1p**

$|x-1^2| + |x-2^2| \ge |x-1^2-x+2^2| = |2^2-1^2| = 3 \cdot 1$
$|x-3^2| + |x-4^2| \ge |x-3^2-x+4^2| = |4^2-3^2| = 7 \cdot 1$
$|x-5^2| + |x-6^2| \ge |x-5^2-x+6^2| = |6^2-5^2| = 11 \cdot 1$
….
$|x-2015^2| + |x-2016^2| \ge |x-2015^2-x+2016^2| = |2016^2-2015^2| = 4031 \cdot 1$ **1p**

Obținem: $|x-1^2| + |x-2^2| + |x-3^2| + \cdots |x-2017^2| \ge 3+7+11+\cdots+4031+|x-2017^2| = 4\cdot0+3+4\cdot1+3+4\cdot2+3+\cdots+4\cdot1007+3+|x-2017^2| = 4\cdot\frac{1007\cdot1008}{2}+3\cdot1008+|x-2017^2| = 2014\cdot1008+3\cdot1008+|x-2017^2| =$
$2017\cdot1008+|x-2017^2| \underbrace{\ge}_{|a|+|b|\ge|a+b|} |2017\cdot1008+x-2017^2| = |x-2017\cdot1009|$ **1p**

3. Fie paralelogramul ABCD, în care AB>BC şi punctul M∈(AB) astfel încât MB=BC. O dreaptă care trece prin punctul D intersectează pe (MB) în punctul N şi pe (MC) în punctul P, BP⋂ (AD)={R}, DP⋂ CB={S}. Să se demonstreze că:

a) $\frac{DC}{CS} = \frac{DR}{BS}$;

b) AR = MN.

3. Rezolvare:

a) (CP este bisectoarea unghiului $\widehat{DCS}$ deoarece unghiurile $\widehat{CMB}$ şi $\widehat{DCM}$ sunt congruente şi respectiv unghiurile $\widehat{CMB}$ şi $\widehat{MCB}$ sunt congruente. **1p**

Aplicăm teorema bisectoarei în triunghiul DCS şi obţinem relaţia $\frac{DP}{PS} = \frac{DC}{CS}$ (1) **1p**

BS | | RD . Se aplică teorema fundamentală a asemănării şi triunghiurile DPR şi SPB vor fi asemenea $\Rightarrow \frac{DP}{PS} = \frac{DR}{BS}$ (2) **1p**

Din (1) şi (2) va rezulta că: $\frac{DC}{CS} = \frac{DR}{BS}$ (3) **1p**

b)BN | | DC . Se aplică teorema fundamentală a asemănării şi triunghiurile SCD şi SBN vor fi asemenea $\Rightarrow \frac{DC}{BN} = \frac{CS}{BS} \Rightarrow \frac{DC}{CS} = \frac{BN}{BS}$ (4) **1p**

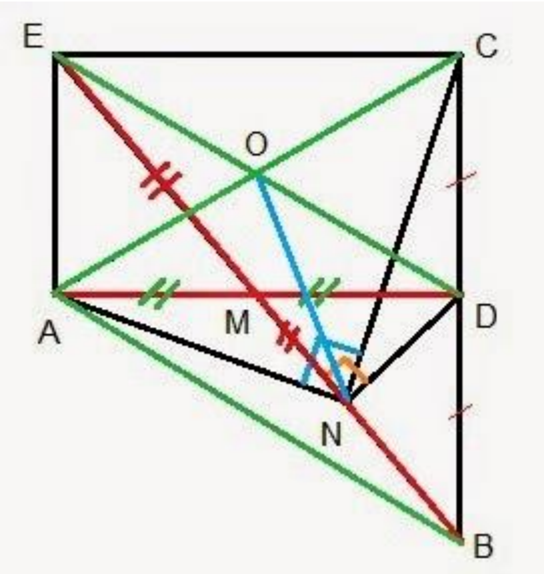
Din (3) și (4) rezultă că DR = BN;AD=MB⇒ AD-DR = MB-BN ⇒ AR = MN. **2p**

4. Fie A. B, C trei puncte necoliniare. Dacă D este mijlocul lui [BC], M este mijlocul lui [AD], E este simetricul lui B față de M și N aparține segmentului [BM] astfel încât:
m(∢ ANC) = m (∢ DNM) = 90^0. Să se demonstreze că:

a) ABDE paralelogram;

b) AECD este dreptunghi.

4.Rezolvare:



Rezolvare:

a)D este mijlocul segmentului [BC], rezultă că [BD] ≡ [DC], (1)

M este mijlocul lui [AD], rezultă că [AM] ≡ [MD], (2)

E este simetricul lui B față de M, rezultă că B, M și E sunt trei puncte coliniare și [BM]≡ [ME], (3)

Din relațiile (2) și (3) rezultă că ABDE este un paralelogram. **2p**

b)Deoarece ABDE este un paralelogram, rezultă că:

[AE] ≡ [BD] , [AB] ≡ [DE] , [AE] ∥ [BD] , [AB] ∥ [DE] (4)

Deoarece B, C și D sunt trei puncte coliniare (D fiind mijlocul segmentului BC) rezultă că
[AE] ∥ [BC] sau [AE] ∥ [DC] (5)

Din (1), și [AE] ≡ [BD] din relația (4) rezultă [AE] = [DC] (6)

Din (5) și (6), rezultă că AECD este paralelogram . **1p**

Deoarece AECD este paralelogram, are proprietatea că diagonalele se taie în părți egale. Rezultă că:
AC ∩ DE ={O} , [AO] ≡ [OC] și [EO] ≡ [OD]. **1p**

În triunghiul ANC, $m(\measuredangle ANC) = 90^0$ și $[ON]$ mediană deoarece O este mijlocul lui [AC], rezultă că ON = AC / 2 = AO = OC. (7) **1p**

În triunghiul DNE, $m(\measuredangle DNE) = 90^0$ și $[ON]$ mediană deoarece O este mijlocul lui [DE], rezultă că ON = DE / 2 = DO = EO (8) **1p**

Din relațiile (7) și (8) rezultă că:

ON = AO = OC = DO = EO ceea ce înseamnă că diagonalele AC și DE sunt egale.

AECD este un paralelogram care are diagonalele egale, deci este un dreptunghi. **1p**