MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GORJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ, 17.02.2017

CLASA A IX-A

BAREM DE NOTARE

1. Demonstraţi că:

a) $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$, $\forall a,b\in R$, $\forall x,y>0$;

b) $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, $\forall a,b,c\in R$, $\forall x,y,z>0$;

c) Dacă x,y,z sunt numere reale nenule care verifică relaţia

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=\frac{35}{x+y+z},$$

atunci x,y,z nu pot avea toate acelaşi semn.

Soluţie:

a) Inegalitatea se scrie echivalent: $a^2xy+a^2y^2+b^2x^2+b^2xy\geq a^2xy+2abxy+b^2xy$ sau $(ay-bx)^2\geq 0$, relaţie care este adevărată. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$. (2p)

b) Aplicând relaţia de la punctul a) obţinem

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$ (1p)

c) Presupunem că numerele x,y,z au toate acelaşi semn. Dacă sunt pozitive atunci avem $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\geq\frac{(1+2+3)^2}{x+y+z}=\frac{36}{x+y+z}>\frac{35}{x+y+z}$, contradicţie cu ipoteza. (3p)

Dacă sunt negative, înmulţim relaţia cu -1 şi reducem problema la situaţia în care toate sunt pozitive. (1p)

2. Determinaţi valoarea minimă şi valoarea maximă a expresiei

$E(x)=\frac{x}{x^2+2x+2}$, unde x este un număr real.

Soluţie:

Căutăm un număr real pozitiv a astfel încât $\frac{x}{x^2+2x+2} \leq \frac{1}{a}$, $\forall x \in R$. Relaţia se scrie echivalent $x^2 + (2-a)x + 2 \geq 0$, $\forall x \in R$, aceasta fiind adevărată dacă membrul stâng se poate restrânge într-un pătrat, caz în care avem $2 - a = -2\sqrt{2}$, deci $a = 2 + 2\sqrt{2}$. Atunci relaţia $E(x) \leq \frac{1}{2+2\sqrt{2}}$ se scrie echivalent $\left(x-\sqrt{2}\right)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $x = \sqrt{2}$, deci maximul lui $E(x)$ este $\frac{1}{2+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. (4p)

În mod similar căutăm a real negativ astfel încât $\frac{x}{x^2+2x+2} \geq \frac{1}{a}$, $\forall x \in R$, sau echivalent $x^2 + (2-a)x + 2 \geq 0$, $\forall x \in R$. Obţinem $a = 2 - 2\sqrt{2}$, iar minimul lui $E(x)$ va fi $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, pentru $x = -\sqrt{2}$. (3p)

3. Determinaţi valorile naturale ale lui n pentru care cel puţin două dintre numerele $\left[\sqrt{n^2+1}\right], \left[\sqrt{n^2+5}\right], \left[\sqrt{n^2+9}\right] \ldots, \left[\sqrt{n^2+2017}\right]$ sunt egale, unde am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.

Soluţie:

Dacă $n \geq 3$ avem $n^2 < n^2 + 1 < n^2 + 5 < (n+1)^2$, de unde obţinem $n < \sqrt{n^2+1} < \sqrt{n^2+5} < n+1$, deci $\left[\sqrt{n^2+1}\right] = \left[\sqrt{n^2+5}\right] = n$. (4p)

Dacă $n = 0$, avem $\left[\sqrt{n^2+9}\right] = \left[\sqrt{n^2+13}\right] = 3$. (1p)

Dacă $n = 1$, avem $\left[\sqrt{n^2+9}\right] = \left[\sqrt{n^2+13}\right] = 3$. (1p)

Dacă $n = 2$, avem $\left[\sqrt{n^2+13}\right] = \left[\sqrt{n^2+17}\right] = 4$. (1p)

Deci n poatea avea orice valoare naturală.

4. Fie $ABCD$ un paralelogram în care avem M este mijlocul lui $[BC]$, N este mijlocul lui $[AM]$ şi $DN \cap AC = \{P\}$. Calculaţi raportul $\frac{AP}{PC}$.

Soluţie:

Notăm $\frac{AP}{PC} = k$, şi obţinem $\overrightarrow{DP} = \frac{\overrightarrow{DA}+k\overrightarrow{DC}}{1+k}$. (2p)

De asemenea avem

$$\overrightarrow{DN} = \frac{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DM}}{2} = \frac{\overrightarrow{DA}+\frac{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}}{2}}{2} = \frac{2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}}{4} = \frac{3\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DC}}{4}$$ (2p)

Cum punctele D, P, N sunt coliniare, deducem că există $\alpha \in R$ astfel încât să avem $\overrightarrow{DP} = \alpha\overrightarrow{DN}$, adică $\frac{\overrightarrow{DA}+k\overrightarrow{DC}}{1+k} = \frac{3\alpha\overrightarrow{DA}+2\alpha\overrightarrow{DC}}{4}$. (2p)

Cum vectorii $\overrightarrow{DA}$ $și$ $\overrightarrow{DC}$ sunt necoliniari, deducem că $\frac{1}{1+k} = \frac{3\alpha}{4}$ $și$ $\frac{k}{1+k} = \frac{2\alpha}{4}$, relaţii din care obţinem $k = \frac{2}{3} = \frac{AP}{PC}$. (1p)