

# Olimpiada Națională de Matematică

## Etapa Locală Dâmbovița

---

18 februarie 2017

---

« Matematica e precisă, dar nu e reală și e reală, dar nu e precisă »

### CLASA A IX-A

**Subiectul 1.** Determinați numerele reale  $x$  și  $y$  care satisfac egalitatea:

$$3\sqrt{x+y} + 2\sqrt{8-x} + \sqrt{6-y} = 14.$$

**Subiectul 2.** Șirurile 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, ... și 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, ... au termeni comuni. Calculați suma primilor 100 de termeni comuni.

**Subiectul 3.** Arătați că, pentru orice număr natural  $n \geq 1$ , există un număr natural impar  $k$  (depinzând de  $n$ ) astfel încât:

$$3^{2^n} - 1 = 2^{n+2} \cdot k.$$

**Subiectul 4.** Fie  $ABC$  un triunghi și paralelogramele  $AMNB$  și  $BNPC$ .

a) Demonstrați că  $CPMA$  este paralelogram.

b) Dacă  $O_1, O_2, O_3$  sunt centrele de simetrie ale celor trei paralelograme, demonstrați că centrul de greutate al triunghiului  $O_1O_2O_3$  este mijlocul segmentului determinat de centrele de greutate ale triunghiurilor  $ABC, MNP$ .

GM

# Olimpiada Națională de Matematică

## Etapa Locală Dâmbovița

18 februarie 2017

« Matematica e precisă, dar nu e reală și e reală, dar nu e precisă »

### CLASA A X-A

**Subiectul 1.** Determinați mulțimea numerelor naturale  $n$  pentru care avem:

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2.$$

**Subiectul 2.** Fie  $a, b \in (0,1) \cup (1, \infty)$ ,  $a \neq b$ . Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} a^{\lg y} - b^{\lg x} = 0 \\ (ax)^{\lg a} - (by)^{\lg b} = 0 \end{cases}$$

**Subiectul 3.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietatea că  $f(f(x)) = x + 1$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Demonstrați că  $f$  este bijectivă.

b) Demonstrați că funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , prin legea:

$$g(x) = f^{-1}(x) - f(x),$$

este funcție constantă ( $f^{-1}$  este inversa funcției  $f$ ).

**Subiectul 4.** Fie  $a, b, c \in (1, \infty)$ . Demonstrați că:

$$\log_{ab^2c^2} a + \log_{a^2bc^2} b + \log_{a^2b^2c} c = \frac{3}{5} \Leftrightarrow a = b = c.$$

# Olimpiada Națională de Matematică

## Etape Locală Dâmbovița

18 februarie 2017

« Matematica e precisă, dar nu e reală și e reală, dar nu e precisă »

### CLASA A XI-A

**Subiectul 1.** Determinați toate matricele  $X$  cu două linii și două coloane, având elemente reale, astfel încât:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Subiectul 2.** Fie  $a, b, c$  numere reale astfel încât  $a^2 = b^2 + c^2$  și definim matricele:

$$A = \begin{pmatrix} a-b & c \\ c & a+b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a+b & -c \\ -c & a-b \end{pmatrix}.$$

Calculați, numai în funcție de  $a$  și de  $k$ ,  $\det(A^k + B^k)$ , unde  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**Subiectul 3.** Fie șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit, pentru orice număr natural  $n \geq 1$ , prin:

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+3)}. \quad \text{Calculați: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3a_n - \frac{5}{6} \right)^n.$$

**Subiectul 4.** Există funcții  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că, pentru orice  $x > 0$ , avem:

$$f(x+1) - f(x) \geq 1$$

și  $f$  nu are limită la infinit?

GM

# Olimpiada Națională de Matematică

## Etapa Locală Dâmbovița

18 februarie 2017

« Matematica e precisă, dar nu e reală și e reală, dar nu e precisă »

### CLASA A XII-A

**Subiectul 1.** Demonstrați că  $(\mathbb{R}, *)$  este grup abelian, izomorf cu grupul aditiv uzual  $(\mathbb{R}, +)$ , unde operația " $*$ " este definită, pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ , prin:

$$x * y = \left( \sqrt[2017]{x} + \sqrt[2017]{y} - \sqrt[2017]{2017} \right)^{2017}.$$

**Subiectul 2.** Fie  $G$  un grup pentru care există  $a, b \in G$  astfel încât  $a^2 = b^6 = e$  și  $ab = b^4a$ . Demonstrați că  $b^3 = e$  și  $ab = ba$  ( $e$  este elementul neutru al lui  $G$ ).

**Subiectul 3.** Determinați funcțiile continue  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că, pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , avem:

$$\int_0^x f(t) dt = -2xe^x + f(x).$$

**Subiectul 4.** Demonstrați că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \right)^{nx} \sin x \, dx = 0.$$

GM