

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
ADOLF HAIMOVICI

Etapa locală – 18 februarie 2017  
Filiera tehnologică: profilul tehnic

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  
 $x * y = \frac{1}{5}(2x + 2y - 3xy + 2), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
  - a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție.
  - b) Demonstrați că  $x * y \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$  pentru orice  $x, y \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ .
  - c) Calculați  $\left(-\frac{2016}{2017}\right) * \left(-\frac{2015}{2016}\right) * \dots * \left(-\frac{1}{2}\right) * 0 * \left(\frac{1}{2}\right) * \dots * \left(\frac{2016}{2017}\right)$ .
2. Considerăm mulțimea  $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in \mathbb{Z} \text{ și } a^2 - 2b^2 = 1\}$ 
  - a) Arătați că  $0 \notin \mathbb{Z}(\sqrt{2})$ , dar  $3 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Z}(\sqrt{2})$ .
  - b) Arătați că  $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$  este stabilă față de înmulțirea numerelor reale și  $(\mathbb{Z}(\sqrt{2}), \cdot)$  este grup comutativ.
3. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + 2x^2 + x + 5$ .
  - a) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $af(x) + bf'(x) = 5e^x + 4x^2 + 14x + 13$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$
  - b) Să se calculeze  $\int \frac{5e^x + 4x^2 + 14x + 13}{e^x + 2x^2 + x + 5} dx$ .
4. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} (x+1)(x+2), & x \geq 0 \\ e^x + 1, & x < 0 \end{cases}$ 
  - a) Demonstrați că funcția  $f$  admite primitive pe mulțimea numerelor reale.
  - b) Determinați pe mulțimea numerelor reale primitiva  $F$  a funcției  $f$ , cu proprietatea  $F(1) = 0$ .

**Notă:** Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.