

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

ADOLF HAIMOVICI

Etapa locală-18 februarie 2017

Filiera teoretică: profilul uman

1. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției ” $a^2 = b^2$ ”, unde

$$a = \sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 - \sqrt{28 - 16\sqrt{3}} - \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}} \text{ și}$$

$b = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{18}] - [\sqrt{2017}]$, $[x]$ reprezentând partea întreagă a numărului real x .

2. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $\begin{cases} a_3 + a_4 = 6^2 \\ a_5 = 3^3 \end{cases}$.

a) Calculați suma primilor 20 de termeni ai șirului.

b) Arătați că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$, $b_n = a_{a_n}$ ($\forall n \geq 1$) este o progresie aritmetică, iar șirul $(c_n)_{n \geq 1}$, $c_n = 3^{a_n}$ ($\forall n \geq 1$) este o progresie geometrică.

3.

a) Se consideră segmentul AB și M mijlocul său. Arătați că pentru orice punct P din plan, $2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$.

b) Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ și punctele: M - mijlocul diagonalei AC , N - mijlocul diagonalei BD și P - mijlocul segmentului MN . Arătați că, pentru orice punct O din plan are loc egalitatea:

$$4\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

4. a) Să se demonstreze că $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$, ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

b) Calculați partea întreagă și partea fracționară a numărului real a , unde

$$a = \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{2013 \cdot 2017}$$

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.