

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală-18 februarie 2017
Filiera teoretică: profilul științele naturii

Clasa a XII-a

1. Pe \mathbf{R} se consideră legea de compoziție: “ \star ” definită prin: $x \star y = x y - x - y + 2$

a) Rezolvați ecuația: $\sqrt{x+2} \star \sqrt[3]{x-2} = 1$

b) să se găsească două elemente $a, b \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, cu proprietatea: $a \star b \in \mathbf{N}$

c) rezolvați în \mathbf{R} ecuația $\underbrace{x \star x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } 10 \text{ ori } x} = 1025$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z}_3 \right\}$.

a) Să se determine numărul elementelor mulțimii G .

b) Să se arate că $A \cdot B \in G$, pentru orice $A, B \in G$.

c) Să se determine numărul matricelor din mulțimea G care au determinantul nul.

3. Se consideră funcțiile $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ și $F: (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$,

$F(x) = a \ln(x+1) + b \ln(x^2+1) + c \cdot \arctg x$, unde a, b, c sunt parametri reali.

a) Să se determine a, b, c , astfel încât F să fie o primitivă a funcției f

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

c) Să se studieze monotonia funcției F , în cazul în care ea este primitivă a funcției f

4. Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\int_0^x t^2 \sin 2t dt}{x^4}$

Notă: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.