

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI

Etapă locală - 18 februarie 2017
Filiera tehnologică: profilul servicii

Clasa XII

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție astfel
 $x * y = \frac{1}{5}(2x + 2y - mxy + 2), \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ și } m \in \mathbb{R}.$
 - a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că legea admite element netru.
 - b) Pentru $m = 3$ demonstrați că $x * y \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ pentru orice $x, y \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right).$
 - c) Pentru $m = 3$ calculați $\left(-\frac{2016}{2017}\right) * \left(-\frac{2015}{2016}\right) * \dots * \left(-\frac{1}{2}\right) * 0 * \left(\frac{1}{2}\right) * \dots * \left(\frac{2016}{2017}\right),$
știind că în acest caz legea este asociativă.
2. Considerăm mulțimea $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in \mathbb{Z} \text{ și } a^2 - 2b^2 = 1\}$
 - a) Arătați că $0 \notin \mathbb{Z}(\sqrt{2})$, dar $3 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Z}(\sqrt{2})$.
 - b) Arătați că $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ este stabilă față de înmulțirea numerelor reale și $(\mathbb{Z}(\sqrt{2}), \cdot)$ este grup comutativ.
3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + 2x^2 + x + 5$.
 - a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $af(x) + bf'(x) = 5e^x + 4x^2 + 14x + 13$,
pentru orice $x \in \mathbb{R}$
 - b) Să se calculeze $\int \frac{5e^x + 4x^2 + 14x + 13}{e^x + 2x^2 + x + 5} dx$.
4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} (x+1)(x+2), & x \geq 0 \\ e^x + 1, & x < 0 \end{cases}$
 - a) Demonstrați că funcția f admite primitive pe mulțimea numerelor reale.
 - b) Determinați pe mulțimea numerelor reale primitiva F a funcției f , cu
proprietatea $F(1) = 0$.

Notă: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.