Olimpiada Națională de Matematică,
etapa locală, 24 februarie 2017, Caraș-Severin
clasa a IX-a

Problema 1. *Pentru orice șir* $(a_n)_{n\geq 1}$ *se notează* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ *și* $U_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$

a) *Demonstrați că dacă* $S_n = 2n^2 - n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, *atunci* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este o progresie aritmetică.*

b) *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este o progresie geometrică, determinați numărul natural n pentru care*

$$U_n = \left(\frac{S_n}{T_n}\right)^{n-4}$$

Problema 2. *Se consideră un patrulater convex ABCD și punctele M, N, P, Q pentru care* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ND}, \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PC}$ *și* $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ}$. *Demonstrați că:*

a) *dacă ABCD este paralelogram, atunci punctele D, C și Q sunt coliniare;*

b) *dacă* $4 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$, *atunci ABCD este paralelogram.*

Problema 3. *Demonstrați că, dacă* $a, b, c \in (0, \infty)$ *și* $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, *atunci sunt adevărate inegalitățile:*

(i) $a + b + c \leq 3$;

(ii) $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{3}{2abc}$.

Problema 4. *Se consideră o mulțime* $G \subset \mathbb{R}$ *care are următoarele proprietăți:*

a) $1 \in G$;

b) $x \in G \Rightarrow \sqrt{x+2} \in G$;

c) $\sqrt{x+3} \in G \Rightarrow (x+4) \in G$.

Arătați că: $\sqrt{2017} \in G$

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.