Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală, 24 februarie 2017, Caraș-Severin, clasa a VII-a

Problema 1. *Arătați că numărul* $A = 21^n + 23^n + 2^{n+1} \cdot 9 - 2^{2n}, n \in \mathbb{N}^*$ *se divide cu 38 pentru orice n, număr natural nenul*

Soluție. *:*

A *este număr par și deci* $2 \mid A$	*1 p*
$A = (19+2)^n + (19+4)^n + 2^n \cdot 18 - 4^n$	*2 p*
$A = 19 \cdot k + 2^n + 19 \cdot p + 2^n \cdot 18 - 4^n$	*2 p*
$A = 19 \cdot k + 2^n + 19 \cdot p + 19 \cdot 2^n \Rightarrow A \vdots 19$	*2 p*

Problema 2. *Rezolvați în* $\mathbb{Z}$ *ecuația:*

$$\frac{2017^x + 1}{2} + \frac{2017^x + 5}{3} + \frac{2017^x + 11}{4} + \frac{2017^x + 19}{5} + \frac{2017^x + 29}{6} = 15$$

Soluție. *:*

$\left(\frac{2017^x + 1}{2} - 1\right) + \left(\frac{2017^x + 5}{3} - 2\right) + \left(\frac{2017^x + 11}{4} - 3\right) + \left(\frac{2017^x + 19}{5} - 4\right) + \left(\frac{2017^x + 29}{6} - 5\right) = 0$	*3 p*
$\frac{2017^x - 1}{2} + \frac{2017^x - 1}{3} + \frac{2017^x - 1}{4} + \frac{2017^x - 1}{5} + \frac{2017^x - 1}{6} = 0$	*2p*
$(2017^x - 1) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 0 \to 2017^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$	*2 p*

Problema 3. *Într-un paralelogram* $ABCD$ *se notează cu* O *intersecția diagonalelor. Pe laturile* AB, BC, CD *și* DA *se aleg punctele M, N, P respectiv Q astfel încât M, O, P sunt puncte coliniare și N, O, Q sunt puncte coliniare.*

a) *Demonstrați că MNPQ este paralelogram*

b) *Se notează* $\{E\} = MN \cap DA, \{F\} = PQ \cap BC$. *Arătați că punctele E, O și F sunt coliniare.*

Soluție. *:*

$AMCP$ *- paralelogram* $\Rightarrow$ *O este mijlocul lui* $[MP]$; *Analog O este mijlocul lui*$[NQ]$ $\Rightarrow$ *MNPQ -paralelogram*	*3 p*
$ENFQ$ *- paralelogram, O - mijlocul lui* $[QN] \Rightarrow$ *E, O, C - coliniare*	*4p*

Problema 4. *Se consideră triunghiul* ABC, *M un punct situat în interiorul triunghiului* ABC *și punctele* $\{A'\} = BC \cap AM, \{B'\} = AC \cap BM, \{C'\} = AB \cap CM$. *Arătați că punctul M este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă:*

$$\frac{A'M}{MA} = \frac{B'M}{MB} = \frac{C'M}{MC}$$

Soluție. :

Dacă M este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci $\frac{A'M}{MA} = \frac{B'M}{MB} = \frac{C'M}{MC} = \frac{1}{2}$;	*1 p*
Reciproc, din $\frac{A'M}{MA} = \frac{B'M}{MB}$ *rezultă* $A'B' \parallel AB \Rightarrow \frac{CB'}{B'A} = \frac{CA'}{A'B}$ *(1)* *În triunghiul ABC dreptele AA', BB', CC' sunt concurente. Din teorema lui Ceva rezultă* $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$ *(2)*	*1 p* *1 p*
Din relațiile (1) și (2) rezultă $\frac{BC'}{C'A} = 1 \Rightarrow$ *C' este mijlocul lui* $[AB]$ *rezultă* $[CC']$ *este mediană*	*1 p*
$\frac{B'M}{MB} = \frac{C'M}{MC}$ *rezultă* $B'C' \parallel BC$ *rezultă* $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'C}$ *(3)*	*1 p*
Din relațiile (2) și (3) rezultă $\frac{CA'}{A'B} = 1 \Rightarrow$ *A' este mijlocul lui* $[BC]$ *rezultă* $[AA']$ *este mediană*	*1 p*
Medianele $[AA']$ *și* $[CC']$ *se intersectează în M, deci M este centrul de greutate al triunghiului ABC*	*1 p*

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.