Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală, 24 februarie 2017, Caraș-Severin clasa a X-a

Problema 1. *Determinați perechile (x, y) de numere întregi care satisfac:*

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = \dfrac{x+y}{2} \\ 2^x - 2^y = y^2 - x^2 \end{cases}$$

Solutie. *:*

Evident, $x, y \in (0, \infty)$; a doua ecuație se poate scrie	*1 p*
$2^x + x^2 = 2^y + y^2$ *și deoarece funcția* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(t) = 2^t + t^2$ *este strict crescătoare, deci injectivă, avem* $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$	*2 p*
Prima ecuație conduce la $2^x = x^2$	*2p*
$x^2 = t > 0 \Rightarrow 2^{\sqrt{t}} = t$, $S = \{4, 16\}$, *singurile soluții deoarece funcția* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(t) = 2^{\sqrt{t}}$ *este convexă și graficul său nu poate avea mai mult de două puncte comune cu o dreaptă. De aici* $x = 2$ *și* $x = 4$ *soluțiile ecuației date.*	*2p*

Problema 2. *Să se arate că dacă $z \in \mathbb{C}$ verifică inegalitățile: $|z^2 + 1| \leq 1$ și $|z + 1| \leq 1$, atunci $|z| \leq 1$.*

Solutie. *:*

$2z = (z+1)^2 - (z^2+1)$ *și cu inegalitatea modulului ajungem la*	*3 p*
$\lvert 2z\rvert \leq \lvert z+1\rvert^2 + \lvert z^2+1\rvert \leq 2$	*4 p*

Problema 3. *Se consideră o mulțime M de numere complexe care are următoarele proprietăți:*

a) $1 \in M$

b) $x \in M \cap \mathbb{R} \Rightarrow (\cos x + i \cdot \sin x) \in M$

c) $(\cos 2x + i \cdot \sin 2x) \in M \Rightarrow x \in M$.

Demonstrați că pentru orice număr natural n, este adevărată relația $\dfrac{\pi}{2^n} \in M$

Solutie. *:*

$\cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \in M \overset{(c)}{\Longrightarrow} \pi \in M$ $\overset{(b)}{\Longrightarrow} -1 \in M \overset{(c)}{\Longrightarrow} \frac{\pi}{2} \in M$	*3 p*
Dacă $\frac{\pi}{2^k} \in M \overset{b)}{\Rightarrow} \cos\frac{\pi}{2^k} + i\sin\frac{\pi}{2^k} \in M,$ *sau* $\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) + i\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) \in M \overset{c)}{\Rightarrow} \frac{\pi}{2^{k+1}}$ *Am demonstrat astfel prin inducție că* $\frac{\pi}{2^n} \in M, \forall n \in \mathbb{N}$	*3p* *1p*

Problema 4. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *astfel încât* f *este injectivă și* $f(x)\cdot f(1-x) = f(ax+b), \forall x \in \mathbb{R}$, *unde* $a, b \in \mathbb{R}$ *Arătați că:*

a) $a = 0$;

b) $f(1-b) = 1$

c) f *nu este surjectivă*

Solutie. *:*

(a) Pentru $x=0$, *apoi* $x=1$ *se obține* $f(b) = f(a+b) \Rightarrow b = a+b \Rightarrow a = 0$	*3 p*
(b) Egalitatea din enunț: $f(x)\cdot f(1-x) = f(b), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow,$ $f(b)\cdot f(1-b) = f(b).(*)$ *Dacă* $f(b) = 0$ *atunci* $f(x)\cdot f(1-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ *există cel puțin două numere distincte în care* f *se anulează, contradicție* $\Rightarrow f(b) \neq 0$ *Din* $(*)$: $\quad f(1-b) = 1.$	- *2p*
(c) Presupunem că există $t \in \mathbb{R}$ *cu* $f(t) = 0$ $\Rightarrow f(t)\cdot f(1-t) = f(b) = 0$, *contradicție, deci* $0 \notin Im(f)$	*2p*

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.