Olimpiada Națională de Matematică,
etapa locală, 24 februarie 2017, Caraș-Severin
clasa a XI-a

Problema 1.

(a) *Dați un exemplu de matrice* $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *pentru care* $\det(X - I_2) = 1$ *și* $\det(X + I_2) = 3$

(b) *Arătați că, dacă* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *și există* $n \in \mathbb{Z}$ *astfel încât* $\det(A - I_2) = n$ *și* $\det(A + I_2) = n + 2$, *atunci* $\det(A - nI_2)$ *este pătratul unui număr întreg.*

Problema 2. *Pentru orice* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ *se notează:* $x_n = \det(A^n + I_2)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Arătați că:

(a) *dacă* $\det(A) = 1$, *atunci* x_2 *este pătrat perfect;*

(b) *dacă* x_3 *este pătrat perfect, atunci* $x_1 \geq 0$.

($\operatorname{tr} A$ *reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a matricei* A*)*

Problema 3. *Calculați:*

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, *unde* $a_n = \lim\limits_{x\to 0} (1 - x \cdot \sin nx)^{\frac{1}{x^2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 4. *Se consideră șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $x_1 \in (0,1)$ *și* $x_{n+1} = x_n^2(1 - x_n)$, $\forall n \geq 1$.
Demonstrați că șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ *și* $(n \cdot x_n)_{n\geq 1}$ *sunt convergente, având aceiași limită.*

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.