Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală, 24 februarie 2017, Caraș-Severin, clasa a VIII-a

Problema 1. *(a) Dacă x, y și z sunt trei numere reale pozitive arătați că:*

$$xy + xz + yz \le x^2 + y^2 + z^2$$

(b) Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, arătați că:

$$\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ac} + \frac{c}{c^2+ab} \le \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Soluție. *:*

(a) Inegalitatea dată, după înmulțirea cu 2 revine la: $0 \le (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2$, *ceea ce este evident.*	*2p*
$\frac{a}{a^2+bc} \le \frac{a}{2a\sqrt{bc}} = \frac{1}{2\sqrt{bc}}$ *și analoagele. Se obține:*	*2 p*
$\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ac} + \frac{c}{c^2+ab} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}\right) \overset{(a)}{\Longrightarrow}$ $\frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, *și de aici inegalitatea cerută.*	*3p*

Problema 2. *Se consideră $x, y \in \mathbb{R}_+, x > y$ cu proprietatea că $x + y = 504$. Demonstrați că*

$$\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - y^2}} + \sqrt{2x - 2\sqrt{x^2 - y^2}} < \sqrt{2017}$$

Soluție. *:*

$\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2-y^2}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$ $\sqrt{2x - 2\sqrt{x^2-y^2}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$	*4 p*
$\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2-y^2}} + \sqrt{2x - 2\sqrt{x^2-y^2}} = 2\sqrt{x+y} = 2\sqrt{504} = \sqrt{2016} < \sqrt{2017}$	*3p*

Problema 3. *Se consideră prisma patrulateră regulată ABCDA'B'C'D', $AB = a$, $AA' = b$, $0 \le a \le b$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Calculați $d(O, B'C')$ și arătați că există o infinitate de perechi de numere naturale (a, b) astfel încât $d(O, B'C')$ să fie număr natural.*

Soluție. :

$d(O,B'C')=\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$	*3 p*
Determinarea unei perechi (a,b) astfel încât $d(O,B'C')\in\mathbb{N}$ *Determinarea formei generale a perechilor (a,b) și finalizare*	*2p* *2p*

Problema 4. *Se consideră OABC un tetraedru oarecare și M,N,P trei puncte pe* $(OA],(OB]$, *și respectiv* $(OC]$. *Dacă* G_1 *și* G_2 *sunt centrele de greutate ale triunghiurilor MNP și respectiv ABC, arătați că planele (MNP) și (ABC) sunt paralele dacă și numai dacă* O, G_1 *și* G_2 *sunt coliniare.*

Soluție. :

($\Rightarrow$) *Dacă E este mijlocul lui (BC) și F mijlocul lui (NP) se arată că* $AE\|MF$ *și* $OG_2\cap MF=\{G_1\}$	*3 p*
($\Leftarrow$). *Se demonstrează mai întâi că dacă mijloacele a două laturi opuse ale unui patrulater sunt coliniare cu intersecția celorlalte două laturi atunci patrulaterul este trapez.* O, F *și* E *aparțin intersecției dintre planul determinat de* OA *și* OG_2 *cu planul* (OBC), *deci sunt coliniare* $\Rightarrow PN\|BC$. *Analog se arată că* $MP\|AC$ *și* $MN\|AB$	- *4p*

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.