Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală, 24 februarie 2017, Caraș-Severin, clasa a VI-a

Problema 1. *Se dă șirul de fracții:* $\frac{5}{7}; \frac{7}{10}; \frac{9}{13}, ...,$ *fracția din poziția a 10-a fiind* $\frac{23}{34}$.

a) *Studiați dacă șirul conține fracții reductibile;*

b) *Determinați fracția din poziția 2017;*

c) *Stabiliți dacă fracția* $\frac{265}{397}$ *este termen al șirului dat. În caz afirmativ, aflați pe ce poziție se află în șir.*

Soluție. :

(a) Observă că fracțiile din șir sunt de forma $\frac{2k+3}{3k+4}, k \in \mathbb{N}^*$ *Demonstrează că fracțiile de această formă sunt ireductibile.* $3(2k+3) - 2(3k+4) = 1k \in \mathbb{N}^*$	*3 p*
(b) Pentru $k = 2017$*, avem fracția* $\frac{4037}{6055}$,	*2p*
(c) Rezolvând ecuația $\frac{2k+3}{3k+4} = \frac{265}{397}$ *se obține* $k = 131$.	*2p*

Problema 2. *Numerele naturale nenule* $a; b; c$ *verifică relația* $7a + 2b = 5c$.
Arătați că $(a+b)(b+c)(c+a)$ *se divide cu 70.*

Soluție. :

$7a + 2b = 5c \Rightarrow 2(a+b) = 5(c-a) \Rightarrow 5\|(a+b)$ *(1)*	*2 p*
$5b + 5c = 7a + 7b \Rightarrow 5(b+c) = 7(a+b) \Rightarrow 7\|(b+c)$*; (2)*	*2 p*
$5(c+a) = 2(6a+b) \Rightarrow 2\|(c+a)$*, (3)* *Din (1), (2) și (3)* $\Rightarrow$, $(a+b)(b+c)(c+a)$ *se divide cu 70.*	*2 p* *1 p*

Problema 3. *Se consideră unghiul propriu* $\widehat{AOD}$. *Pe bisectoarea* $\widehat{AOD}$ *se aleg punctele B și C cu proprietatea că* $[OA] \equiv [OB]$ *și* $[OC] \equiv [OD]$

a) *Demonstrați că* $[AC] \equiv [BD]$

b) *Arătați că* $\widehat{BAC}$ *și* $\widehat{CDB}$ *au aceeași măsură*

Soluție. :

(a) $\xrightarrow{LUL} \triangle AOC \equiv \triangle BOD \Rightarrow [AC] \equiv [BD]$	*3 p*
(b) Notăm $m(\widehat{BAC}) = y$, $\triangle AOB$ *isoscel* $\Rightarrow m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OBA}) = \dfrac{180^0 - m(\widehat{AOB}}{2}$ $\triangle COD$ *isoscel* $\Rightarrow m(\widehat{OCD}) = m(\widehat{ODC}) = \dfrac{180^0 - m(\widehat{COD}}{2}$ $\Rightarrow m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OBA}) = m(\widehat{OCD}) = m(\widehat{ODC}) = x$	- *2p*
$m(\widehat{ABC}) = 180^0 - m(\widehat{OBA}) = 180^0 - x$ *În* $\triangle ABC \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = x - y$ *Din a)* $\Rightarrow m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BDO}) = x - y$ $\Rightarrow m(\widehat{CDB}) = x - (x - y) = y$ $\Rightarrow \widehat{BAC} \equiv \widehat{CDB}$	- *2 p*

Problema 4. *Pe dreapta d se consideră segmentul unitate AB (un segment de lungime 1) și punctele $C_1, C_2, ..., C_{2017}$ în această ordine, astfel încât lungimea fiecărui segment, începând cu BC_1 să fie egală cu dublul lungimii segmentului precedent. Dacă M este mijlocul segmentului BC_{2017}, arătați că $[BM] \equiv [AC_{2016}]$*

Soluție. *:*

$AB = 1, BC_1 = 2, C_1C_2 = 4 = 2^2, ..., C_{2016}C_{2017} = 2^{2017}$;	*1 p*
$BC_{2017} = 2 + 2^2 + ... + 2^{2017} = 2^{2018} - 2$ $\Rightarrow BM = \dfrac{2^{2018} - 2}{2} = 2^{2017} - 1$	*3 p*
$AC_{2016} = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2016} = 2^{2017} - 1$ $Rightarrow BM = AC_{2016} = 2^{2017} - 1 \Rightarrow [BM] \equiv [AC_{2016}]$	*3 p*

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 2 ore.