Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală, 24 februarie 2017, Caraș-Severin clasa a XII-a

Problema 1. *Demonstrați că:*

(a) *grupurile* $(\mathbb{R}, +)$ *și* $((0, \infty), \cdot)$ *sunt izomorfe;*

(b) *grupurile* $(\mathbb{R}, +)$ *și* $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ *nu sunt izomorfe;*

Soluție. *:*

(a) Izomorfismul este dat de funcția $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = e^x$*;*	*3 p*
(b)Se demonstrează prin reducere la absurd. Presupunem că există un izomorfism f. Atunci există $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $f(a) = -1$*. Atunci* $f(a + a) = f(a) \cdot f(a) = 1$*. Dar* $f(0) = 1$*, deci* $a + a = 0$*, de unde* $a = 0$*, ceea ce este imposibil.*	*2p* *2p*

Problema 2. *Pentru fiecare număr natural* $n \geq 3$ *se consideră mulțimea* $A_n = \{a \in \mathbb{Z}_n \mid a^2 + \hat{2} = a\}$

a) *Arătați că există* $n \geq 3$ *pentru care* $A_n \neq \emptyset$

b) *Demonstrați că dacă* $x \in A_n$*, atunci* $(\hat{1} - x) \in A_n$*.*

c) *Determinați numărul natural n pentru care* A_n *are un singur element.*

Soluție. *:*

(a) De exemplu: $\hat{4} \in A_7 \neq \emptyset$ *sau* $\hat{2} \in A_4 \neq \emptyset$	*2 p*
(b) $x^2 + \hat{2} = x \Rightarrow \left(\hat{1} - x\right)^2 + 2 = \hat{1} - x \Rightarrow \hat{1} - x \in A_n$*,*	*2p*
(c) A_n *are un singur element* $\Rightarrow$ *pentru* $x \in A_n$ *avem* $x = \hat{1} - x \Rightarrow \hat{2}x = \hat{1}$ *sau* $\hat{2}x - \hat{1} = \hat{0}$*.* *Pe de altă parte:* $\left(\hat{2}x - \hat{1}\right)^2 = \hat{4}x^2 - \hat{4}x + \hat{1} = \hat{4}\left(x - \hat{2}\right) - \hat{4}x + \hat{1} = -\hat{7} \Rightarrow \hat{0} = -\hat{7}$*. Deci* $n = 7$*. Într-adevăr:* $A_7 = \{\hat{4}\}$*.*	*1p* *2p*

Problema 3. *Se notează* $L_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1 + x^{2n}} dx, n \in \mathbb{N}^*$*.*

a) *Arătați că* $L_2 \leq \ln \sqrt{2}$*.*

b) *Demonstrați că* $arctgx \leq x$ *pentru orice* $x \in [0, +\infty)$*.*

c) *Calculați* $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot L_n$*.*

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
REŞIŢA - ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
www.isjcs.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Soluție. :

(a) $L_1 = \frac{1}{2}\cdot\ln\sqrt{2}$. *Se arată că* $\frac{x^2}{1+x^4} \le \frac{x}{1+x^2}, \forall x \in [0,1]$ *și se integrează pe* $[0,1]$.	*3 p*
(b)Se arată că $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = \text{arctg}x - x$ *este descrescătoare și deci* $f(x) \le f(0) = 0, \forall x \ge 0,$	*2p*
(c) $n\cdot L_n = \int\limits_0^1 x\cdot(\text{arctg}x^n)'\,dx = x\cdot\text{arctg}\,(x^n)\big\|_0^1 - \underbrace{\int\limits_0^1 \text{arctg}(x^n)dx}_{not. J_n}$	*1p*
Folosim inegalitatea de la b) și integrăm pe $[0,1]$: $0 \le \text{arctg}(x^n) \le x^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} J_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot L_n = \frac{\pi}{4}$	*1p*

Problema 4. *Se consideră* $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\cdot\cos x dx, n\in\mathbb{N}^*$.

(a) Demonstrați că $\frac{2}{\pi}\cdot x \le \sin x \le 1, \quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Calculați I_1.

(c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot n^2\cdot I_n$.

Soluție. :

(a)Inegalitatea din dreapta este cunoscută iar pentru cea din stânga se arată că funcția: $g:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}, g(x) = \frac{\sin x}{x}$ *este descrescătoare, deci pentru orice* $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ *avem* $g(x)\ge g(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$	- *2 p*
(b) $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot(\sin x)'dx = \frac{\pi}{2} - 1,$	*2 p*
(c) Integrând prin părți avem:	-
$I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\cos x\big\|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot(-\sin x)dx = \frac{1}{n+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1}\cdot\sin x dx.$	*1 p*
Folosind (a) avem: $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^{n+2}}{n+1} \le \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\cdot\sin x \le \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ *Integrând obținem:* $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+3)} \le I_n \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.	*1 p*
Folosind lema cleștelui: $$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot n^2\cdot I_n = \frac{\pi^2}{4}$$.	*1 p*