Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală, 24 februarie 2017, Caraș-Severin clasa a XII-a

Problema 1. *Demonstrați că:*

(a) *grupurile* $(\mathbb{R},+)$ *și* $((0,\infty),\cdot)$ *sunt izomorfe;*

(b) *grupurile* $(\mathbb{R},+)$ *și* $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ *nu sunt izomorfe;*

Problema 2. *Pentru fiecare număr natural* $n \geq 3$ *se consideră mulțimea* $A_n = \{a \in \mathbb{Z}_n \mid a^2 + \hat{2} = a\}$

a) *Arătați că există* $n \geq 3$ *pentru care* $A_n \neq \emptyset$

b) *Demonstrați că dacă* $x \in A_n$*, atunci* $(\hat{1} - x) \in A_n$.

c) *Determinați numărul natural* n *pentru care* A_n *are un singur element.*

Problema 3. *Se notează* $L_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx, n \in \mathbb{N}^*$.

a) *Arătați că* $L_2 \leq \ln\sqrt{2}$.

b) *Demonstrați că* $arctg x \leq x$ *pentru orice* $x \in [0,+\infty)$.

c) *Calculați* $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot L_n$.

Problema 4. *Se consideră* $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cdot \cos x dx, n \in \mathbb{N}^*$.

(a) *Demonstrați că* $\frac{2}{\pi} \cdot x \leq \sin x \leq 1, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) *Calculați* I_1.

(c) *Calculați* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \cdot n^2 \cdot I_n$.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.