Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală, 24 februarie 2017, Caraș-Severin, clasa a V-a

Problema 1. *În anul 2017, Maria și sora ei mai mare Ioana au fiecare vârsta egală cu suma cifrelor anului lor de naștere. Ce vârstă are fiecare dintre cele două surori?*

Solutie. :

Anul nașterii celor două surori are forma: $\overline{19xy}$ *sau* $\overline{20ab}$ $2017 - \overline{19xy} = 1+9+x+y \Rightarrow 11x+2y = 107 \Rightarrow x = 9, y = 4$	*2 p* *2p*
$2017 - \overline{20ab} = 2+0+a+b \Rightarrow 11a+2b = 15 \Rightarrow a = 1, b = 2$	*2p*
Finalizare: 5 ani și 23 ani	*1p*

Problema 2. *Determinați mulțimile A și B știind că îndeplinesc simultan condițiile:*

a) A este formată din numere naturale pătrate perfecte;

b) B este formată din numere naturale cuburi perfecte;

c) $A \cap B$ *are un singur element nenul;*

d) suma elementelor mulțimii A este egală cu suma elementelor mulțimii B și este egală cu 100

Solutie. :

Numerele naturale pătrate perfecte mai mici decât 100 sunt: $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$. *Numerele naturale cuburi perfecte mai mici decât 100 sunt:* $0, 1, 8, 27, 64$. *Deoarece* $A \cap B$ *are un singur element nenul rezultă că* $A \cap B$ *poate fi* $\{1\}$ *sau* $\{64\}$ *Dacă* $A \cap B = \{1\}$ *obținem cazurile:* *1)* $A = \{1, 9, 16, 25, 49\}$ *și* $B = \{1, 8, 27, 64\}$ *2)* $A = \{0, 1, 9, 16, 25, 49\}$ *și* $B = \{1, 8, 27, 64\}$ *3)* $A = \{1, 9, 16, 25, 49\}$ *și* $B = \{0, 1, 8, 27, 64\}$	- *1 p* *3 p*
Dacă $A \cap B = \{64\}$ *obținem cazurile:* *4)* $A = \{36, 64\}$ *și* $B = \{1, 8, 27, 64\}$ *5)* $A = \{0, 36, 64\}$ *și* $B = \{1, 8, 27, 64\}$ *6)* $A = \{36, 64\}$ *și* $B = \{0, 1, 8, 27, 64\}$	- *3 p*

Problema 3. *Un număr natural de forma* $\overline{abcd}$ *se numește cărășean dacă* $2 \cdot (a+b+c) = d$.

a) *Stabiliți care dintre numerele 2016 și 2017 este cărășean.*

b) *Demonstrați că nici un număr cărășean nu este divizibil cu 5.*

c) *Demonstrați că toate numerele cărășene sunt divizibile cu 3.*

d) *Aflați câte numere cărășene există.*

Solutie. *:*

a) Deoarece cifra d este cifră pară, deducem că numărul 2017 nu este cărășean. Pentru 2016 obținem: $2(2+1+0) = 6$, *deci numărul 2016 este cărășean.*	*1p*
b) d par, $\Rightarrow d \neq 5; a \neq 0, \Rightarrow 2(a+b+c) \neq 0$, *de unde* $d \neq 0$. *În concluzie* $\overline{abcd}$ *nu este divizibil cu 5.*	*1p*
c) $a+b+c+d = 3(a+b+c)$ *deci* $\overline{abcd}$ *este divizibil cu 3;*	*1 p*
d) d par, $\Rightarrow d \in \{2,4,6,8\}$. *Dacă* $d = 2 \Rightarrow a+b+c = 1 \Rightarrow 1002$; *Dacă* $d = 4 \Rightarrow a+b+c = 2 \Rightarrow 1014, 1104, 2004$; *Dacă* $d = 6 \Rightarrow a+b+c = 3 \Rightarrow 1116, 1026, 1206, 2016, 2106$; *Dacă* $d = 8 \Rightarrow a+b+c = 4 \Rightarrow 1038, 1308, 2028, 2208, 3018, 3108, 4008$. *Așadar există 16 numere cărășene.*	- *4 p*

Problema 4. *La un concurs de matematică se dau 30 de probleme. Pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare problemă rezolvată greșit se scad 3 puncte. Câte probleme a rezolvat corect și câte a greșit un elev care a obținut în total 118 puncte?*

Solutie. *:*

Metoda falsei ipoteze. Dacă un elev ar rezolva corect toate problemele, ar trebui să obțină $30 \cdot 5 = 150$ *puncte. Din acest total pentru fiecare problemă rezolvată greșit se pierd 8 puncte.*	*4 p*
Se pierd în total $150 - 118 = 32$ *puncte. Numărul problemelor rezolvate greșit este* $32 : 8 = 4$.	*3p*

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 2 ore.