INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CARAŞ-SEVERIN

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală, 24 februarie 2017, Caraș-Severin clasa a XI-a

Problema 1.

(a) *Dați un exemplu de matrice* $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *pentru care* $\det(X - I_2) = 1$ *și* $\det(X + I_2) = 3$

(b) *Arătați că, dacă* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *și există* $n \in \mathbb{Z}$ *astfel încât* $\det(A - I_2) = n$ *și* $\det(A + I_2) = n + 2$, *atunci* $\det(A - nI_2)$ *este pătratul unui număr întreg.*

Solutie. *:*

(a) Calcule elementare conduc la $\det X = \mathrm{Tr} X = 1$; *orice exemplu corect se punctează corespunzător*	*3 p*
(b) $\det A = n, \mathrm{Tr} A = 1 \Rightarrow,$ $\det(A - nI_2) = n - n + n^2 = n^2$	- *4p*

Problema 2. *Pentru orice* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ *se notează:* $x_n = \det(A^n + I_2)$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Arătați că:*

(a) *dacă* $\det(A) = 1$, *atunci* x_2 *este pătrat perfect;*

(b) *dacă* x_3 *este pătrat perfect, atunci* $x_1 \geq 0$.

(trA reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A)

Solutie. *:*

(a) Considerăm $f(x) = \det(A - xI_2), x \in \mathbb{C}$; *Avem imediat că* $f(x) = x^2 - (trA)x + (detA)$ *Deoarece* $f(i) = detA - 1 - i \cdot trA$ *și* $f(-i) = detA - 1 + i \cdot trA$, *rezultă că* $x_2 = det(A^2 + I_2 = det(A - iI_2)det(A + iI_2) = f(-i)f(i) = (detA - 1)^2 + (trA)^2$, *deci* $x_2 = (trA)^2$,	- *1 p* *3 p*
(b) $x_3 = det(A^3 + I_2) = k^2, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_3 = x_1 \cdot det(A^2 + A + I_2)$; *cum,* $det\left(A^2 + A + I_2\right) = det\left(\left(A + \frac{1}{2}I_2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_2\right)^2\right) \geq 0$, *rezultă că* $x_1 \geq 0$.	*1p* *2p*

Problema 3. *Calculați:*

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, *unde* $a_n = \lim\limits_{x\to 0} (1 - x \cdot \sin nx)^{\frac{1}{x^2}}, n \in \mathbb{N}^*$.

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
REŞIŢA - ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
www.isjcs.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Solutie. *:*

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=$	*2 p*
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=0$	*1 p*
(b) $a_n=\lim\limits_{x\to 0}(1-x\cdot\sin nx)^{\frac{1}{-x\cdot\sin nx}\cdot\frac{-\sin nx}{nx}\cdot n}=e^{-n}$,	*2p*
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}}=\dfrac{1}{e-1}$.	*2p*

Problema 4. *Se consideră șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $x_1\in(0,1)$ *și* $x_{n+1}=x_n^2\left(1-x_n\right),\forall n\geq 1$.
Demonstrați că șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ *și* $(n\cdot x_n)_{n\geq 1}$ *sunt convergente, având aceeași limită.*

Solutie. *:*

(a) $x_1\in(0,1)\Rightarrow x_2\in(0,1)$ *și, în general, dacă* $x_k\in(0,1)$ *pentru un* $k\in\mathbb{N}^*$ *oarecare, atunci* $x_{k+1}\in(0,1)$*; așadar am arătat prin inducție matematică faptul că șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este mărginit. (1)* $x_{n+1}-x_n=-x_n\left(x_n^2-x_n+1\right)<0,\forall n\geq 1$, *deci șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este și strict descrescător (2).* *Din (1) și (2), avem că* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent (Weierstrass), având limita* $A\in\mathbb{R}$. *Prin trecere la limită în relația de recurență din enunț se ajunge la* $A=A^2-A^3\Rightarrow A=0$.	- *3 p*
(b) Din relația de recurență deducem: $\frac{x_{n+1}}{x_n}=x_n\cdot(1-x_n)\leq\frac{1}{4}$, *Iterând obținem:* $\frac{x_n}{x_1}\leq\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ *și de aici:* $n\cdot x_n\leq n\cdot x_1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\to 0$	*2p* *2p*

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.