Olimpiada Națională de Matematică,
etapa locală, 24 februarie 2017, Caraș-Severin
clasa a X-a

Problema 1. *Determinați perechile* (x, y) *de numere întregi care satisfac:*

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = \dfrac{x+y}{2} \\ 2^x - 2^y = y^2 - x^2 \end{cases}$$

Problema 2. *Să se arate că dacă* $z \in \mathbb{C}$ *verifică inegalitățile:* $|z^2 + 1| \leq 1$ *și* $|z + 1| \leq 1$, *atunci* $|z| \leq 1$.

Problema 3. *Se consideră o mulțime* M *de numere complexe care are următoarele proprietăți:*

a) $1 \in M$

b) $x \in M \cap \mathbb{R} \Rightarrow (\cos x + i \cdot \sin x) \in M$

c) $(\cos 2x + i \cdot \sin 2x) \in M \Rightarrow x \in M$.

Demonstrați că pentru orice număr natural n, este adevărată relația $\dfrac{\pi}{2^n} \in M$

Problema 4. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *astfel încât* f *este injectivă și* $f(x) \cdot f(1-x) = f(ax+b), \forall x \in \mathbb{R}$, *unde* $a, b \in \mathbb{R}$ *Arătați că:*

a) $a = 0$;

b) $f(1-b) = 1$

c) f *nu este surjectivă*

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
REŞIŢA - ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
www.isjcs.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro