Olimpiada Națională de Matematică,
etapa locală, 24 februarie 2017, Caraș-Severin,
clasa a VIII-a

Problema 1. *(a) Dacă x, y și z sunt trei numere reale pozitive arătați că:*

$$xy + xz + yz \le x^2 + y^2 + z^2$$

(b) Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, arătați că:

$$\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ac} + \frac{c}{c^2+ab} \le \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Problema 2. *Fie $x, y \in \mathbb{R}_+, x > y$ cu proprietatea că $x + y = 504$.*
Demonstrați că

$$\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - y^2}} + \sqrt{2x - 2\sqrt{x^2 - y^2}} < \sqrt{2017}$$

Problema 3. *Se consideră prisma patrulateră regulată ABCDA'B'C'D', $AB = a$, $AA' = b$, $0 \le a \le b$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Calculați $d(O, B'C')$ și arătați că există o infinitate de perechi de numere naturale (a, b) astfel încât $d(O, B'C')$ să fie număr natural.*

Problema 4. *Se consideră OABC un tetraedru oarecare și M,N,P trei puncte pe $(OA], (OB]$, și respectiv $(OC]$. Dacă G_1 și G_2 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor MNP și respectiv ABC, arătați că planele (MNP) și (ABC) sunt paralele dacă și numai dacă O, G_1 și G_2 sunt coliniare.*

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.