Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală, 24 februarie 2017, Caraș-Severin clasa a IX-a

Problema 1. *Pentru orice șir* $(a_n)_{n\geq 1}$ *se notează* $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+...+a_n$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ *și* $U_n=\prod_{k=1}^{n}a_k=a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n$

a) *Demonstrați că dacă* $S_n=2n^2-n, \forall n\in\mathbb{N}^*$, *atunci* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este o progresie aritmetică.*

b) *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este o progresie geometrică, determinați numărul natural* n *pentru care*

$$U_n=\left(\frac{S_n}{T_n}\right)^{n-4}$$

Solutie. *:*

(a) $*\ S_n-S_{n-1}=a_n=4n-3, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ $*$ *Cum* $S_1=1=4\cdot 1-3\Rightarrow a_n=4n-3, \forall n\in\mathbb{N}^*$ $*\ a_{n+1}-a_n=4, \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ *șirul este o progresie aritmetică*	*3 p* *1 p*
(b) $*\ S_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}, q\neq 1,$ $*\ T_n=\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{q^{n-1}}\cdot\frac{q^n-1}{q-1},\ U_n=a_1^n\cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$ $*\ \frac{S_n}{T_n}=a_1^2\cdot q^{n-1}\Rightarrow\left(\frac{S_n}{T_n}\right)^{\frac{n}{2}}=U_n\Rightarrow\frac{n}{2}=n-4\Rightarrow n=8$ $*$ *dacă* $q=1$, *atunci* $n=8$	*2p* *1p*

Problema 2. *Se consideră un patrulater convex* $ABCD$ *și punctele* M, N, P, Q *pentru care* $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{BN}=\overrightarrow{ND}, \overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PC}$ *și* $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PQ}$. *Demonstrați că:*

a) *dacă* $ABCD$ *este paralelogram, atunci punctele* D, C *și* Q *sunt coliniare;*

b) *dacă* $4\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$, *atunci* $ABCD$ *este paralelogram.*

Solutie. *:*

M, N, P *sunt mijloacele segmentelor* (AC), (BD), *respectiv* (BC); *în plus,* P *este și mijlocul lui* (AQ) *(a)* $ABQC$ *paralelogram* $\Rightarrow AB\|\|CD$; *Cum* $AB\|\|DC\Rightarrow D, C, Q$ *coliniare*	*1 p* *2 p*
(b) $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right)$ *și* $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)\Rightarrow$ $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}\right)=$ $=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right)\Rightarrow$ $4\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ *folosind relația din ipoteză deducem* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, *deci* $ABCD$ *este paralelogram.*	*1p* *2p* *1p*

Problema 3. *Demonstrați că, dacă* $a, b, c \in (0, \infty)$ *și* $a^2 + b^2 + c^2 = 3$*, atunci sunt adevărate inegalitățile:*

(i) $a + b + c \leq 3$;

(ii) $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} + \dfrac{1}{1+c^2} \leq \dfrac{3}{2abc}$.

Solutie. :

(a) $* \; (1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c)^2 \leq 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 9$ $a, b, c > 0 \Rightarrow a + b + c \leq 3$	3 p
(b) $a^2 + 1 \geq 2a \Rightarrow \dfrac{1}{a^2+1} \leq \dfrac{1}{2a}$ *și analoagele*	2p
$\sum \dfrac{1}{a^2+1} \leq \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{ab+bc+ca}{abc} \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc} = \dfrac{3}{2abc}$	2p

Problema 4. *Se consideră o mulțime* $G \subset \mathbb{R}$ *care are următoarele proprietăți:*

a) $1 \in G$;

b) $x \in G \Rightarrow \sqrt{x+2} \in G$;

c) $\sqrt{x+3} \in G \Rightarrow (x+4) \in G$.

Arătați că: $\sqrt{2017} \in G$

Solutie. :

$1 \in G \overset{b)}{\Rightarrow} \sqrt{3} \in G$; *așadar* $\sqrt{0+3} \in G \overset{c)}{\Rightarrow} 4 \in G \overset{b)}{\Rightarrow} \sqrt{6} \in G \overset{c)}{\Rightarrow}$ $7 \in G \overset{b)}{\Rightarrow} 3 \in G$; *Pe de altă parte avem și* $1 = \sqrt{-2+3} \in G \overset{c)}{\Rightarrow} 2 \in G$	3 p
Pentru $n \geq 3$*, presupunem că* $1, 2, 3, ..., n \in G$ *și astfel avem* $(n-2) \in G \overset{b)}{\Rightarrow} \sqrt{n} \in G$ *sau* $\sqrt{n-3+3} \in G$, *de unde din c), deducem că* $(n+1) \in G$*; am demonstrat astfel prin inducție că mulțimea G conține toate numerele naturale nenule.* *Cum* $2015 \in G$*, folosind b) ajungem la* $\sqrt{2017} \in G$.	- 4p

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.