

# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

**Etapă locală - 20.02.2016**

**Clasa a VIII-a**

**Barem de corectare și notare**

**1.a)**  $a^2 = (\sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}})^2 = 7 + \sqrt{13} - 2 \cdot \sqrt{7+\sqrt{13}} \cdot \sqrt{7-\sqrt{13}} + 7 - \sqrt{13} = \dots$  1 punct

$= 14 - 2 \cdot \sqrt{7^2 - \sqrt{13}^2} = 14 - 2 \cdot 6 = 2 \in \mathbb{N} \dots$  2 puncte

**b)**  $a^3 - 2 \cdot a = a \cdot (a^2 - 2) = a \cdot 0 = 0 \dots$  2 puncte

Deci  $(a^3 - 2 \cdot a - 1)^{2016} = (-1)^{2016} = 1 \dots$  2 puncte

**2.**  $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot (xy + xz + yz) \dots$  1 punct

$\frac{9}{4} = \frac{3}{4} + 2 \cdot (xy + xz + yz) \Rightarrow xy + xz + yz = \frac{3}{4} \dots$  1 punct

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 0 \dots$  1 punct

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0 \dots$  2 puncte

$\Rightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 0 \dots$  1 punct

$x = y = z = \frac{1}{2} \dots$  1 punct

**3.a)**  $\triangle MBA$ ,  $m(\angle MBA) = 90^\circ$  și  $BN$  – mediană  $\Rightarrow BN = \frac{MA}{2}$ . Analog  $\triangle MCA \Rightarrow CN = \frac{MA}{2}$ .

Deci  $\triangle BNC$  - isoscel,  $NP$  - mediană  $\Rightarrow NP$  - înălțime  $\Rightarrow NP \perp BC \dots$  1 punct

$\triangle MCA$ ,  $NE$  – linie mijlocie  $\Rightarrow NE \parallel MC \Rightarrow NE \perp AC$  (1)

Analog  $\triangle ABC \Rightarrow PE \perp AC$  (2)  $\dots$  1 punct

Din (1) și (2) se obține  $AC \perp (PNE)$  și  $PN \subset (PNE) \Rightarrow AC \perp PN \dots$  1 punct

Deci  $NP \perp BC$ ,  $NP \perp AC \Rightarrow NP \perp (ABC) \dots$  1 punct

b)  $\triangle NPB, m(\angle NPB) = 90^\circ$  (teorema lui Pitagora)  $\Rightarrow PN^2 = BN^2 - BP^2$  ..... 1 punct

$$\Rightarrow PN^2 = \frac{AM^2}{4} - \frac{BC^2}{4} \text{ ..... 1 punct}$$

$$\Rightarrow 4 \cdot NP^2 = (MB^2 + AB^2) - (AB^2 + AC^2) = MB^2 - AC^2 \text{ ..... 1 punct}$$

4.  $EA \perp (ABC), AB \perp BC \Rightarrow (T3 \perp) \Rightarrow EB \perp BC$  ..... 1 punct

Analog  $ED \perp DC$  ..... 1 punct

$$\triangle EBC \text{ ( teorema catetei ) } \Rightarrow BC^2 = CM \cdot EC \text{ ..... 1 punct}$$

$$\triangle EDC \text{ ( teorema catetei ) } \Rightarrow CD^2 = CN \cdot EC \text{ ..... 1 punct}$$

$$BC^2 - CD^2 = EC \cdot (CM - CN) = EC \cdot MN \text{ ..... 2 puncte}$$

$$48 = 3 \cdot EC \Rightarrow EC = 16cm \text{ ..... 1 punct}$$

**NOTĂ.** Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.