Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Un tetraedru are lungimile laturilor exprimate prin numere naturale astfel încât produsul lungimilor oricăror două muchii opuse este egal cu 6. Arătaţi că tetraedrul este o piramidă triunghiulară regulată în care muchiile laterale formează cu planul bazei unghiuri cu măsura mai mare sau egală cu $30°$.

Subiectul 2. a) Numim *succesiune admisibilă* o înşiruire de patru cifre pare în care nicio cifră nu apare de trei sau patru ori. Determinaţi numărul de succesiuni admisibile.

b) Pentru fiecare număr natural n, $n \geq 2$, notăm cu d_n numărul de posibilităţi de a completa cu cifre pare un tablou de n linii şi 4 coloane, respectând condiţiile următoare:

i) oricare linie este o succesiune admisibilă;

ii) succesiunea admisibilă 2,0,0,8 ocupă o singură linie a tabloului.

Determinaţi valorile lui n pentru care numărul $\dfrac{d_{n+1}}{d_n}$ este întreg.

Subiectul 3. Fie $a, b \in [0,1]$. Demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{1}{1+a+b} \leq 1 - \frac{a+b}{2} + \frac{ab}{3}.$$

Subiectul 4. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$. Pe muchiile $(A'D')$, $(A'B')$ şi $(A'A)$ se consideră punctele M_1, N_1 şi respectiv P_1, iar pe muchiile (CB), (CD) şi (CC') se consideră punctele M_2, N_2 şi respectiv P_2. Notăm cu d_1 distanţa dintre dreptele M_1N_1 şi M_2N_2, cu d_2 distanţa dintre dreptele N_1P_1 şi N_2P_2, iar cu d_3 distanţa dintre dreptele P_1M_1 şi P_2M_2. Presupunem că distanţele d_1, d_2 şi d_3 sunt diferite două câte două. Arătaţi că dreptele M_1M_2, N_1N_2 şi P_1P_2 sunt concurente.

Timp de lucru: 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală – Timişoara, 30 aprilie 2008

CLASA A VIII-A – SOLUŢII

Subiectul 1. Lungimile muchiilor tetraedrului sunt 1, 2, 3 sau 6. Fie A, B, C, D vârfurile tetraedrului şi u măsura unghiului dintre muchia laterală şi planul bazei. Dacă una dintre muchii, de exemplu AB, este 1, atunci una dintre feţe, de exemplu ABC este triunghi echilateral cu latura 1, altfel s-ar contrazice inegalitatea triunghiului. Celelalte 3 muchii vor avea lungimea 6, deci $ABCD$ este piramidă regulată cu vârful D. . . . . 2 puncte

Piramida are înălţimea $\dfrac{\sqrt{321}}{3}$, deci $\sin u = \dfrac{\sqrt{321}}{18} > \dfrac{1}{2}$, de unde $u > 30°$. . . . . 1 punct

Dacă niciuna dintre laturi nu este 1, atunci trei dintre muchii sunt egale cu 2, iar celelalte trei muchii sunt egale cu 3. . . . . 1 punct

Cel puţin două dintre muchiile cu un capăt în D sunt egale, de exemplu $DA = DC = 3$. Atunci $BA = BC = 2$. Dacă $AC = 3$, tetraedrul este piramidă regulată cu vârful B. Dacă $AC = 2$, tetraedrul este piramidă regulată cu vârful D. . . . . 1 punct

Piramida cu muchiile bazei egale cu 2 şi muchiile laterale egale cu 3 are înălţimea egală cu $\dfrac{\sqrt{69}}{3}$, deci $\sin u = \dfrac{\sqrt{69}}{9} > \dfrac{1}{2}$, de unde $u > 30°$. . . . 1 punct

Piramida cu muchiile bazei egale cu 3 şi muchiile laterale egale cu 2 are înălţimea egală cu 1, deci $\sin u = \dfrac{1}{2}$, de unde $u = 30°$. . . . . 1 punct

Subiectul 2. a) Notăm cu S numărul de *succesiuni admisibile.* Există 5 cifre pare deci $5^4 = 625$ succesiuni de 4 cifre pare. . . . . 1 punct

Există 5 succesiuni cu toate cifrele egale. . . . . 1 punct

Există $5 \cdot 4^2 = 80$ de succesiuni cu exact 3 cifre egale. . . . . 1 punct

Obţinem $S = 625 - 5 - 80 = 540$. . . . . 1 punct

b) Există n posibilităţi de a plasa *succesiunea admisibilă* 2,0,0,8 ca linie în tablou. Fiecare din celelalte $n-1$ linii se poate completa în $S-1$ moduri. Obţinem $d_n = n(S-1)^{n-1} = n \cdot 539^{n-1}$. . . . . 1 punct

Avem $\dfrac{d_{n+1}}{d_n} = \dfrac{(n+1) \cdot 539}{n}$. . . . .

Atunci $\dfrac{d_{n+1}}{d_n} \in \mathbb{N}$ dacă $n \mid 539$, deci $n \in \{7, 11, 49, 77, 539\}$. . . . . . . 1 punct

Subiectul 3. Prin calcule obţinem $2a^2b + 2ab^2 - 3a^2 - 3b^2 - 4ab + 3a + 3b \geq 0$. . . . . 1 punct

Din ipoteză avem $(a-1)(b-1) \geq 0$. . . . . 2 puncte

Inegalitatea se scrie $2a(a-1)(b-1) + 2b(a-1)(b-1) + a(1-a) + b(1-b) \geq 0$, ... 3 puncte

evident adevărată, ca sumă de numere pozitive. . . . . 1 punct

Subiectul 4. Notăm cu a lungimea muchiei cubului. Presupunem că, de exemplu, M_1N_1 nu e paralelă cu M_2N_2 şi P_1N_1 nu e paralelă cu P_2N_2. Înseamnă că $d_1 = d_2 = a$, contradicţie. . . . . 1 punct

Deducem că $M_1N_1 \parallel M_2N_2$ sau $P_1N_1 \parallel P_2N_2$. 1 punct

Dacă $M_1N_1 \parallel M_2N_2$ şi P_1N_1 nu e paralelă cu P_2N_2, atunci $M_1P_1 \parallel M_2P_2$, altfel $d_2 = d_3 = a$. . . . . 1 punct

Deci $M_1N_1 \parallel M_2N_2$ şi $P_1N_1 \parallel P_2N_2$ sau $M_1N_1 \parallel M_2N_2$ şi $M_1P_1 \parallel M_2P_2$. . . . . 1 punct

În fiecare caz rezultă că planele $(M_1N_1P_1)$ şi $(M_2N_2P_2)$ sunt paralele. . . . . 1 punct

Prin urmare, $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $P_1N_1 \parallel P_2N_2$ şi $M_1P_1 \parallel M_2P_2$. . . . . . 1 punct

Cum dreptele M_1M_2, N_1N_2 şi P_1P_2 sunt necoplanare, dar concurente două câte două, rezultă că toate trei sunt concurente. . . . . 1 punct