

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa finală – Timișoara, 30 aprilie 2008

CLASA A VII-A

Subiectul 1. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu $B > C$. Ducem înălțimea AD , $D \in BC$, și perpendiculara DE pe AC , $E \in AC$. Considerăm punctul F pe segmentul DE . Arătați că dreptele AF și BF sunt perpendiculare dacă și numai dacă $EF \cdot DC = BD \cdot DE$.

Subiectul 2. Un dreptunghi se poate împărți, ducând paralele la laturile sale, în 200 de pătrate congruente și în 288 de pătrate congruente. Arătați că dreptunghiul se poate împărți și în 392 de pătrate congruente.

Subiectul 3. Fie p, q și r trei numere prime astfel încât $5 \leq p < q < r$. Știind că $2p^2 - r^2 \geq 49$ și $2q^2 - r^2 \leq 193$, determinați p, q, r .

Subiectul 4. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu centrul O , $AB \neq BC$. Perpendiculara în O pe BD intersectează dreptele AB și BC în punctele E , respectiv F . Fie M și N mijloacele segmentelor CD , respectiv AD . Arătați că $FM \perp EN$.

Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa finală – Timișoara, 30 aprilie 2008

CLASA A VII-A – SOLUȚII

Subiectul 1. În ipoteza $AF \perp BF$, observăm că patrulaterul $ABDF$ este inscriptibil, deci $\angle ABF = \angle ADF$ și $\angle BAF = \angle DAE$1 punct

Rezultă $\angle BAD = \angle FAE$, de unde $\triangle ABD \sim \triangle AFE$, deci $\frac{BD}{FE} = \frac{AD}{AE}$.
1 punct

Pe de altă parte, $\triangle ADE \sim \triangle DCE$, de unde rezultă $\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE}$.1 punct

Atunci $\frac{BD}{FE} = \frac{CD}{DE}$, de unde $EF \cdot DC = BD \cdot DE$ 1 punct

Reciproc, din $EF \cdot DC = BD \cdot DE$ avem $\frac{BD}{FE} = \frac{CD}{DE}$ și apoi $\triangle ADE \sim \triangle DCE$, de unde $\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE}$ 1 punct

Urmează $\frac{BD}{FE} = \frac{AD}{AE}$, deci $\triangle ABD \sim \triangle AFE$, de unde $\angle AFE = \angle ABD$.
1 punct

Obținem $ABDF$ inscriptibil, deci $\angle AFB = \angle BDA$, de unde $AF \perp BF$.
1 punct

Subiectul 2. Laturile a, b ale dreptunghiului se împart în m_1 , respectiv n_1 segmente de lungime u formându-se 200 de pătrate de latură u și în m_2 , respectiv n_2 segmente de lungime v formându-se 288 de pătrate de latură v .
Avem $m_1 n_1 = 200$, $m_2 n_2 = 288$ 1 punct

În plus, $\frac{a}{m_1} = \frac{b}{n_1} = u$ și $\frac{a}{m_2} = \frac{b}{n_2} = v$ 1 punct

Avem $u^2 = \left(\frac{a}{m_1}\right)^2 = \frac{ab}{200}$, $v^2 = \left(\frac{a}{m_2}\right)^2 = \frac{ab}{288}$, de unde $m_1^2 = \frac{200a}{b}$, $m_2^2 = \frac{288a}{b}$ 2 puncte

Rezultă $2m_2 > m_1$ și analog $2n_2 > n_1$. Fie $m_3 = 2m_2 - m_1$ și $n_3 = 2n_2 - n_1$. Atunci $\frac{m_3}{a} = \frac{2m_2}{a} - \frac{m_1}{a}$, $\frac{n_3}{b} = \frac{2n_2}{b} - \frac{n_1}{b}$, deci $\frac{a}{m_3} = \frac{b}{n_3} = z$.

Avem $m_1n_2 = \frac{a}{u} \cdot \frac{b}{v} = \frac{b}{u} \cdot \frac{a}{v} = n_1m_2$, și $m_1n_1 \cdot m_2n_2 = 200 \cdot 288 = 240^2$, deci $m_1n_2 = m_2n_1 = 240$ 1 punct

Atunci $m_3n_3 = 4m_2n_2 + m_1n_1 - 2m_1n_2 - 2m_2n_1 = 4 \cdot 288 + 200 - 4 \cdot 240 = 392$, deci împărțind laturile dreptunghiului în m_3 , respectiv n_3 segmente de lungime z , obținem 392 pătrate de latură z 2 puncte

Subiectul 3. Din enunț rezultă $2q^2 - 193 \leq r^2 \leq 2p^2 - 49$, deci $q^2 - p^2 \leq 72$ 2 puncte

Pe de altă parte, din $5 \leq p < q < r$ rezultă $r \geq 11$, deci $2p^2 \geq 49 + 121 = 170$, adică $p \geq 11$ 1 punct

Cum $(q - p)(q + p) \leq 72$ și $q - p = 2$ sau $q - p \geq 4$, rezultă

- i) $q - p = 2$ și $q + p \leq 36$, deci $(p, q) = (11, 13)$ sau $(17, 19)$;
- ii) $q - p \geq 4$ și $q + p \leq 18$, fără soluții în urma condiției $p \geq 11$. 2 puncte

Dacă $(p, q) = (11, 13)$, atunci $145 \leq r^2 \leq 193$, de unde $r = 13 = q$, ceea ce nu convine. 1 punct

Dacă $(p, q) = (17, 19)$, atunci $529 \leq r^2 \leq 529$, de unde $r = 23$. În concluzie, $p = 17, q = 19, r = 23$ 1 punct

Subiectul 4. Fie P mijlocul laturii BC și Q intersecția dreptelor DC și EF . Cum MP este linie mijlocie în triunghiul BCD avem $MP \parallel BD$, deci $FQ \perp MP$ 2 puncte

Din $MC \perp FP$ rezultă că Q este ortocentrul triunghiului MPF , deci $PQ \perp FM$ 2 puncte

Congruența LUL a triunghiurilor POQ și NOE arată că $QP \parallel EN$. 2 puncte

Rezultă $FM \perp EN$, ceea ce trebuia arătat. 1 punct