INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MUREŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
FILIALA MUREŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010
Cls. a IX-a

PROBLEMA I.

Fie $a,b,c \in (0.\infty)$ şi $a+b+c=2010$.
Să se arate că $\sqrt{ab+ac}+\sqrt{ab+bc}+\sqrt{ac+bc} \leq 3015$.

PROBLEMA II.

Arătați că orice număr natural $n \geq 2$ poate fi scris sub forma $n=2k_1+3k_2$, unde $k_1, k_2 \in \mathrm{N}$.

PROBLEMA III.

În triunghiul ABC considerăm punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{5}$ şi $\frac{AN}{NC}=\frac{3}{4}$, fie $P \in (MN)$ astfel încât $\frac{MP}{PN}=\frac{2}{7}$.
Dacă $AP \cap BC = \{Q\}$, să se determine valoarea raportului în $\frac{BQ}{QC}$.

PROBLEMA IV.

Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se consideră punctele D şi respectiv E, astfel încât $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$. Fie T intersecția dreptelor DC şi BE.
Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ cu proprietatea că $\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\alpha\overrightarrow{TA}$.

Gazeta Matematică, Dan Nedeianu

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MUREŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
FILIALA MUREŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010
Cls. a IX-a ,
BAREM DE CORECTARE

PROBLEMA I.

Fie $a,b,c \in (0.\infty)$ şi $a+b+c=2010$.
Să se arate că $\sqrt{ab+ac}+\sqrt{ab+bc}+\sqrt{ac+bc} \leq 3015$ **.**

Rezolvare (se acordă 1 p din oficiu)

Folosim inegalitatea mediilor, $\sqrt{ab+ac} \overset{(1p)}{=} \sqrt{a(b+c)} \overset{(2p)}{\leq} \frac{a+b+c}{2} = 1005$,

$\sqrt{ab+bc} \leq \frac{a+b+c}{2} = 1005$, $(1p)$

$\sqrt{ac+bc} \leq \frac{a+b+c}{2} = 1005$, $(1p)$

Însumând cele trei relaţii obţinem $\sqrt{ab+ac}+\sqrt{ab+bc}+\sqrt{ac+bc} \leq 3015$, $(1p)$

PROBLEMA II.

Arătaţi că orice număr natural $n \geq 2$ poate fi scris sub forma $n = 2k_1 + 3k_2$, unde $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$.

Rezolvare (se acordă 1 p din oficiu)

Demonstrăm prin inducţie;

$P(2): 2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0$, ($k_1 = 1,\ k_2 = 0$) $(1p)$

$P(k): k = 2 \cdot k_1 + 3 \cdot k_2$, $(1p)$

$P(k+1): k+1 = 2 \cdot l_1 + 3 \cdot l_2$, $(1p)$

Din $P(k)$ $k+1 = 2 \cdot k_1 + 3 \cdot k_2 + 1 = 2 \cdot k_1 + 3 \cdot k_2 + \overbrace{3-2}^{(2p)} = 2 \cdot (k_1 - 1) + 3 \cdot (k_2 + 1) = 2 \cdot l_1 + 3 \cdot l_2$ $(1p)$

PROBLEMA III.

În triunghiul ABC considerăm punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{5}$ şi $\frac{AN}{NC} = \frac{3}{4}$, fie $P \in (MN)$ astfel încât $\frac{MP}{PN} = \frac{2}{7}$.

Dacă $AP \cap BC = \{Q\}$, să se determine valoarea raportului $\frac{BQ}{QC}$.

Rezolvare (se acordă 1 p din oficiu)

$$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\ \frac{AN}{NC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}\ (1p)$$

$$\frac{MP}{PN} = \frac{2}{7} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{7}{9}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AN}.$$

Deci $\overrightarrow{AP} = \frac{7}{54}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{21}\overrightarrow{AC}, (1p)$

Fie $\frac{BQ}{QC} = k$, atunci $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}, (1p)$

Punctele *A,P* şi *Q* sunt colineare, deci $\exists \alpha \in \mathbf{R}^*$, astfel încât $\overrightarrow{AQ} = \alpha\overrightarrow{AP}$,

$\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC} = \alpha\left(\frac{7}{54}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{21}\overrightarrow{AC}\right)$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sunt necoliniari $(1p)$

$$\text{Deci } \begin{cases} \frac{1}{k+1} = \frac{7\alpha}{54} \\ \frac{k}{k+1} = \frac{2\alpha}{21} \end{cases} (1p) \Rightarrow \frac{7\alpha k}{54} = \frac{2\alpha}{21} \Rightarrow \frac{7k}{18} = \frac{2}{7} \Rightarrow k = \frac{36}{49}\ (1p)$$

PROBLEMA IV.

Pe laturile *AB* şi *AC* ale triunghiului ABC se consideră punctele *D* şi respectiv *E*, astfel încât $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$. Fie *T* intersecția dreptelor *DC* şi *BE*.

Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ cu proprietatea că $\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \alpha\overrightarrow{TA}$.

Gazeta Matematică, Dan Nedeianu

Rezolvare (se acordă 1 p din oficiu)

Fie $k, p \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$: $\overrightarrow{DA} = k \cdot \overrightarrow{DB}$ şi $\overrightarrow{EA} = p \cdot \overrightarrow{EC}$, $(1p)$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (k+1)\overrightarrow{DB} + (p+1)\overrightarrow{EC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EC} \text{ necoliniari} \end{array}\right\} \overset{(1p)}{\Rightarrow} k = p \overset{(1p)}{=} -1 \Rightarrow D, E \text{ mijloacele laturilor } AB \text{ respectiv } AC.$$

Deci *T* este centrul de greutate $(1p)$

$$\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} \overset{(1p)}{=} \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} = -\overrightarrow{TC} \Rightarrow \alpha = -1,\ (1p)$$

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN MUREŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
FILIALA MUREŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010
Cls. a X-a

I. a) Să se arate că dacă $x=\log_a bc, y=\log_b ac, z=\log_c ab$, atunci $x+y+z+2=xyz$

b) Fie a,b,c numere reale strict pozitive. Arătați că dacă, $2^a=35$, $5^b=14$, $7^c=10$ atunci $abc-(a+b+c)=2$.

II. Se consideră numerele complexe z_1,z_2,z_3 astfel încât $z_1+z_2\in R$, $z_3\cdot z_1+\overline{z_3}\cdot z_2\in R$ si $z_3\in C-R$. Să se demonstreze că $z_1^{2010}+z_2^{2010}\in R$.

III. Să se demonstreze că $\forall a,b,c\in(1,\infty)$, are loc inegalitatea:

$$(ab)^{\sqrt{\log_a c\cdot\log_b c}}+(bc)^{\sqrt{\log_b a\cdot\log_c a}}+(ac)^{\sqrt{\log_a b\cdot\log_c b}}\geq a^2+b^2+c^2.$$

Se cunoa□te : dacă $x,y>1$, atunci $\log_x y>0$.

IV. Fie $z_1,z_2,z_3\in C^*$ cu $z_1+z_2+z_3=0$ şi $|z_1|=a,|z_2|=b,|z_3|=c$. Ştiind că $a^2+b^2=c^2$, arătați că $b^2z_1^2+a^2z_2^2=0$.

(Gazeta Matematică nr.3/2009)

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN MUREŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
FILIALA MUREŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010
Cls. a X-a

I. a) Să se arate că dacă $x=\log_a bc, y=\log_b ac, z=\log_c ab$, atunci $x+y+z+2=xyz$

b) Fie a,b,c numere reale strict pozitive. Arătați că dacă, $2^a=35$, $5^b=14$, $7^c=10$ atunci $abc-(a+b+c)=2$. (1p) oficiu

Solutie: a) $a^x=bc, b^y=ac, c^z=ab$. (1p)

$a^{xyz}=(bc)^{yz}=(ac)^z(ab)^y=$ (1p)

$=a^{z+y}c^zb^y=a^{z+y+2}bc=a^{x+y+z+2}\Rightarrow x+y+z+2=xyz$. (1p)

b) $2^a=5\cdot7, 5^b=2\cdot7, 7^c=2\cdot5\Rightarrow 2^{abc}=5^{bc}\cdot7^{bc}=2^c\cdot2^b\cdot7^c\cdot5^b=$ (2p)

$=2^{b+c+2}\cdot35=2^{b+c+2}\cdot2^a=2^{a+b+c+2}\Rightarrow abc=a+b+c+2$. (1p)

II. Se consideră numerele complexe z_1,z_2,z_3 astfel încât $z_1+z_2\in R$, $z_3\cdot z_1+\overline{z_3}\cdot z_2\in R$ si $z_3\in C-R$. Să se demonstreze că $z_1^{2010}+z_2^{2010}\in R$. (1p) oficiu

Solutie: $z_1+z_2\in R\Rightarrow z_1+z_2=\overline{z_1}+\overline{z_2}\Rightarrow z_1-\overline{z_2}=\overline{z_1}-z_2$ (1) (1p)

$z_3\cdot z_1+\overline{z_3}\cdot z_2\in\mathbb{R}\Rightarrow z_3\cdot z_1+\overline{z_3}\cdot z_2=\overline{z_3}\cdot\overline{z_1}+z_3\cdot\overline{z_2}\Rightarrow z_3\left(z_1-\overline{z_2}\right)=\overline{z_3}\left(\overline{z_1}-z_2\right)$ (2) (2p)

Din (1) si (2) $\Rightarrow z_3\left(\overline{z_1}-z_2\right)=\overline{z_3}\left(\overline{z_1}-z_2\right)\Rightarrow\left(\overline{z_1}-z_2\right)\left(z_3-\overline{z_3}\right)=0$ (3) (1p)

Deoarece $z_3\in C-R\Rightarrow z_3\neq\overline{z_3}$ (4)

Din (3) si (4) $\Rightarrow\overline{z_1}=z_2\Rightarrow\overline{z_1^{2010}}=z_2^{2010}\Rightarrow z_1^{2010}+z_2^{2010}=z_1^{2010}+\overline{z_1^{2010}}\in\mathbb{R}$. (2p)

III. Să se demonstreze că $\forall a,b,c\in(1,\infty)$, are loc inegalitatea:

$(ab)^{\sqrt{\log_a c\cdot\log_b c}}+(bc)^{\sqrt{\log_b a\cdot\log_c a}}+(ac)^{\sqrt{\log_a b\cdot\log_c b}}\geq a^2+b^2+c^2$.

Se cunoa□te : dacă $x,y>1$, atunci $\log_x y>0$. (1p) oficiu

Solu□ie: $(ab)^{\sqrt{\log_a c\cdot\log_b c}}\geq c^2\Leftrightarrow\sqrt{\log_a c\cdot\log_b c}\left(\log_c a+\log_c b\right)\geq2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\log_c a+\log_c b\right)\geq2\sqrt{\log_c a\log_c b}$. (3p)

Se arată în mod analog pentru ceilalti termeni. (2p)

Se însumează rela□iile. (1p)

IV. Fie $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}^*$ cu $z_1+z_2+z_3=0$ si $|z_1|=a,|z_2|=b,|z_3|=c$. Stiind că $a^2+b^2=c^2$, arătati că $b^2z_1^2+a^2z_2^2=0$.

(Gazeta Matematică nr.3/2009)

Solutie: $z_1+z_2+z_3=0\Rightarrow\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=0\Rightarrow$ (1p) oficiu

(1p)

$$\Rightarrow\frac{a^2}{z_1}+\frac{b^2}{z_2}+\frac{c^2}{z_3}=0\Rightarrow\frac{a^2}{z_1}+\frac{b^2}{z_2}=\frac{c^2}{z_1+z_2}\Rightarrow \quad (2p)$$

$$\Rightarrow\left(a^2+b^2\right)z_1z_2+a^2z_2^2+b^2z_1^2=\left(a^2+b^2\right)z_1z_2\Rightarrow a^2z_2^2+b^2z_1^2=0. \quad (3p)$$

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN MUREŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
FILIALA MUREŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010
Cls. a XI-a

1. Să se rezolve ecuația: $X^n = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $n \in N^*$, $X \in M_2(\mathbf{R})$.

2. Fie $A \in M_2(Z)$ astfel încât $\det(A^2 + A + I_2) = \det^2(A + I_2)$.
Să se arate că: $trA + \det A \in \{-8, 0\}$.(trA-urma matricei A)

Gheorghe Ghiță, Buzău

3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{\sqrt{n}}$, unde

$$x_n = \frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

4. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^4$, $(\forall)\, n \in N^*$, $x_1 \in (0, 1)$.
   a) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze limita sa.
   b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4\right) = x_1$
   c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} \cdot x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MUREŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
FILIALA MUREŞ

BAREM DE CORECTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010
Cls. a XI-a

1. **1p** din oficiu

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $u = a + d$

Din ipoteză rezultă $\det(X^n) = 0$ **1p**

Din relația Cayley-Hamilton se obține $X^2 = u \cdot X$, de unde prin inducție,

$$X^n = u^{n-1} X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{2p}$$

Rezultă $u^{n-1} \cdot a = 3,\quad u^{n-1} \cdot b = 1,\quad u^{n-1} \cdot c = 6,\quad u^{n-1} \cdot d = 2$ şi $u^{n-1} \cdot (a+d) = 5$ sau $u^n = 5$ **1p**

Se află a, b, c, d **2p**

2. . **1p** din oficiu

Fie t urma matricei A si d determinantul acestuia. Avem

$\det(A - xI_2) = x^2 - xt + d \Rightarrow \det(A + I_2) = 1 + t + d$ **1p**

$\det(A^2 + A + I_2) = \det(A - \varepsilon I_2) \cdot \det(A - \bar{\varepsilon} I_2) = (\varepsilon^2 - t\varepsilon + d)(\bar{\varepsilon}^2 - t\bar{\varepsilon} + d) = 1 + t^2 + d^2 + t - d + dt$

unde ε radacina cubica a unitatii. **2p**

Atunci $t^2 + d^2 + 1 + t - d + td = (t + d + 1)^2 \Rightarrow (t+3)(d+1) = 3.$ **1p**

Obtinem (t, d) = (-2, 2),(0, 0), (-4, -4), (-6, -2). Deci $t + d \in \{-8, 0\}$ **2p**

3. . **1p** din oficiu

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\sqrt{k+1} - (k+1)\sqrt{k}}{k^2(k+1) - (k+1)^2 k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad \mathbf{2p}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 \qquad \mathbf{1p}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{\sqrt{n+1}}{-1}}\right]^{\frac{-1}{\sqrt{n+1}} \cdot \sqrt{n}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \qquad \mathbf{3p}$$

4. . **1p** din oficiu

a) Se demonstrează prin inducție, că $0 < x_n < 1,\ (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Se observă, că $x_{n+1} - x_n = -x_n^4 < 0 \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Deci şirul este mărginit şi strict descrescător, $\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ convergent. **1p**

Notând limita cu l şi trecând la limită în relația de recurență se obține $l = 0$. **1p**

b) $\lim_{n\to\infty}\left(x_1^4 + x_2^4 + ... + x_n^4\right) = \lim_{n\to\infty}\left[(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + ... + (x_n - x_{n-1})\right] = \lim_{n\to\infty}(x_1 - x_{n-1}) = x_1$ **1p**

c) **3p**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\cdot x_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n\cdot x_n^3} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{\frac{1}{x_n^3}}}.$$

$(x_n)_{n\geq 1}$ fiind strict descrescător, rezultă $\left(\frac{1}{x_n^3}\right)_{n\geq 1}$ strict crescătorm, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x_n^3}\right)_{n\geq 1}$ este şir nemărginit.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\cdot x_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^3} - \frac{1}{x_n^3}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x_{n+1}^3\cdot x_n^3}{x_n^3 - x_{n+1}^3}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{\left(1-x_n^3\right)^3}{1+\left(1-x_n^3\right)+\left(1-x_n^3\right)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MUREŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
FILIALA MUREŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010
Cls. a XII-a

1. Fie $(G,\cdot)$ grup multiplicativ şi $f,g:G\to G,\quad f(x)=x^{2009},\ g(x)=x^{2010}$ morfisme de grup. Ştiind că f este morfism surjectiv să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

2. Se consideră mulţimea:

$$M=\left\{\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\middle|\, \hat{a},\hat{b}\in\mathbb{Z}_7\right\}$$

şi matricea $A=\begin{pmatrix}\hat{4} & \hat{3}\\ \hat{3} & \hat{4}\end{pmatrix}\in M$. Să se rezolve în M ecuaţia $X^6=A$.

3. Să se determine $m\in R$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\ln x\cdot\cos\dfrac{1}{x} & ,\ x>0\\ m & ,\ x=0\end{cases}$$ să admită primitive.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât
$f(x)-f(y)=(x-y)\cdot f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$ Să se arate că funcţia f este identic nulă.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MUREŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
FILIALA MUREŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010
Cls. a XII-a
REZOLVĂRI

1.

$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)\Leftrightarrow (xy)^{2009}=x^{2009}\cdot y^{2009}$

$g(x\cdot y)=g(x)\cdot g(y)\Leftrightarrow (xy)^{2010}=x^{2010}\cdot y^{2010}$

Dar $(xy)^{2010}=(xy)^{2009}\cdot xy=x^{2009}\cdot y^{2009}\cdot xy=x^{2010}\cdot y^{2010}=x^{2009}\cdot x\cdot y^{2009}\cdot y$

$\Rightarrow\ y^{2009}\cdot x=x\cdot y^{2009}$

Cum $f:G\to G$ surjecție $\Rightarrow\ \forall z\in G,\exists y\in G$ a.î. $f(y)=z\Leftrightarrow y^{2009}=z$

Atunci $z\cdot x=x\cdot z,\forall x,z\in G\ \Rightarrow\ (G,\cdot)$ este abelian.

2.

$A=\begin{pmatrix}\hat{4} & \hat{3}\\ \hat{3} & \hat{4}\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=\hat{0}$

$X^6=A\Rightarrow \det\left(X^6\right)=\hat{0}\Rightarrow \det X=\hat{0}$.

Dacă $X=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\Rightarrow \det X=\hat{a}^2-\hat{b}^2=\hat{0}\Leftrightarrow \hat{a}^2=\hat{6},\ \hat{a},\hat{b}\in\mathbb{Z}_7$.

Din tabla operației de înmulțire în $\mathbb{Z}_7\Rightarrow \hat{a}^2,\hat{b}^2\in\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\right\}$. Unica clasă din $\mathbb{Z}_7$ pentru care $\hat{a}^2=\hat{0}$ este $\hat{a}=\hat{0}\Rightarrow\ \hat{0}$ nu este soluție a ecuației $\hat{a}^2=\hat{b}^2$.

Dacă $\hat{a}^2=\hat{b}^2=\hat{1}\Rightarrow$

$\hat{a}=\hat{1},\ \hat{b}=\hat{6}$ sau

$\hat{a}=\hat{6},\ \hat{b}=\hat{1}$ sau

$\hat{a}=\hat{6},\ \hat{b}=\hat{6}$ sau

$\hat{a}=\hat{1},\ \hat{b}=\hat{1}$.

Dacă $\hat{a}^2=\hat{b}^2=\hat{2}\Rightarrow$

$\hat{a}=\hat{b}=\hat{3}$ sau

$\hat{a}=\hat{b}=\hat{4}$ sau

$\hat{a}=\hat{3},\ \hat{b}=\hat{4}$ sau

$$\hat{a}=\hat{4},\ \hat{b}=\hat{3}.$$

Dacă $\hat{a}^2=\hat{b}^2=\hat{4}\Rightarrow$

$$\hat{a}=\hat{b}=\hat{2}\ \text{ sau}$$
$$\hat{a}=\hat{b}=\hat{6}\ \text{ sau}$$
$$\hat{a}=\hat{2},\ \hat{b}=\hat{5}\ \text{ sau}$$

3.

$$\left(x^2\cdot\ln x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\cdot\ln x\cdot\sin\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x}-\ln x\cdot\cos\frac{1}{x}\Rightarrow$$

$$\ln x\cdot\cos\frac{1}{x}=x\sin\frac{1}{x}(2\ln x+1)-\left(x^2\ln x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)'. \qquad (1)$$

Fie funcția $g:(0;\infty)\to R$, $\quad g(x)=x\sin\frac{1}{x}\cdot(2\ln x+1)$.

$\lim\limits_{x\searrow 0}g(x)=0.$ Prelungind prin continuitate funcția g în x=0$\Rightarrow$ $g:[0,\infty)\to R$ continuă$\Rightarrow$ G admite primitive.Fie G o primitivăa lui g, $(G)'=g$.

Relația (1) devine $\ln x\cdot\cos\frac{1}{x}=\left(G(x)-x^2\ln x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)'$.

Dacă f admite primitive, atunci o primitivă a ei este de forma

$$F(x)=\begin{cases}G(x)-x^2\ln x\cdot\sin\frac{1}{x}+C & ,x>0\\ p & ,x=0\end{cases}$$

Necesar F continuă şi derivabilă.

$F(0+0)=G(0)+C.$ Impun p=F(0+0) $\Rightarrow$ $F\big|_{(0,\infty)}$ este derivabilă. Rămâne de verificat derivabilitatea in origine.

$$F'(0)=\lim_{x\searrow 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=G'(0).$$

$$\left.\begin{array}{l}F'(0)=G'(0)=0\\ F'(0)=f(0)=m\end{array}\right\}\Rightarrow m=0.$$

4.

Fie $f(0)=a.$ Dacă $a\neq 0$ atunci pentru $x=\frac{1}{a}$ şi $y=0$ din relația dată în enunț avem:

$$f\left(\frac{1}{a}\right)-a=\frac{1}{a}\cdot f\left(\frac{1}{a}\right)\cdot a\Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)-a=f\left(\frac{1}{a}\right)\Rightarrow a=0 \text{ contradicție.}$$

Deci $a=0\Leftrightarrow f(0)=0$

Pentru $y=0$ din relația dată obținem $f(x)=x\cdot f(x)\cdot f(0)+f(0)\Rightarrow f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$