Inspectoratul Şcolar al Judeţului Satu Mare

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - faza locală
23 ianuarie 2010
Clasa a-VI-a

I. **1)** Fiind date numerele $a = 3^{2011} + 3^{2010}$; $b = 3^{2009} + 3^{2008} + 2$; $c = 3^{2008} - 3^{2007} + 1$,

(2p) **a)** Aflaţi (a ; b) şi [a ; c]

(2p) **b)** Arătaţi că b > 2c.

(3p) **2)** Arătaţi că numărul A este mai mare decât 1000, unde

$$A = \frac{201}{1\cdot 2} + \frac{601}{2\cdot 3} + \frac{1201}{3\cdot 4} + ... + \frac{9001}{9\cdot 10}$$

(prof. Baciu Nicolae – inspector şcolar de specialitate I.S.J., Satu Mare)

II. (7p) Aflaţi numerele naturale a şi b care verifică relaţia : $\dfrac{\overline{a,(b)} + \overline{b,(a)}}{a+b} = \dfrac{a+b}{3a}$.

(prof. Bud Adrian -Liceul Teoretic Negreşti Oaş)

III. Pe dreapta d se consideră punctele O, A, B, C, D, E, F în această ordine astfel încât [OA] =[AB] , B este mijlocul lui [AC], C este mijlocul lui [AD], D este mijlocul lui [BE] şi E este mijlocul lui [CF].

(4p) **a)** Arătaţi că segmentele [OE] şi [CD] au acelaşi mijloc

(3p) **b)** Arătaţi că $\dfrac{AC}{BE} + \dfrac{BC}{CD} + \dfrac{AB}{AD} \geq \dfrac{BF}{AF}$

(prof. Bud Adrian -Liceul Teoretic Negreşti Oaş)

IV. Fie unghiurile adiacente A_1OA_2, A_2OA_3, ... , $A_{15}OA_{16}$ având măsurile egale cu 1°, 2°, ...,15°.

(3p) **a)** Determinaţi măsura unghiului A_1OA_{16}

(4p) **b)** Fie [OM bisectoarea unghiului A_1OA_4 şi [ON bisectoarea unghiului $A_{13}OA_{16}$. Determinaţi măsura unghiului MON.

(prof. Pop Ionela – Şc.cu cls. I-VIII Lipău)

Nota: Timp de lucru 3 ore
Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

Bareme de corectare – clasa a-VI-a

I. 1)

a) $a = 3^{2010} \cdot (3+1) = 3^{2010} \cdot 2^2$

$b = 3^{2008} \cdot 4 + 2 = 2\left(2 \cdot 3^{2008} + 1\right)$

$c = 3^{2007} \cdot 2 + 1$

$(a;b) = 2 \quad ; \quad [a;b] = 3^{2010} \cdot 2^2\left(3^{2007} \cdot 2 + 1\right)$

b) $\frac{b}{c} = \frac{2\left(2 \cdot 3^{2008} + 1\right)}{2 \cdot 3^{2007} + 1}$

$\frac{2 \cdot 3^{2008} + 1}{2 \cdot 3^{2007} + 1} > 1 \Rightarrow \frac{b}{c} > 2 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow b > 2c$

2)

$$A = \frac{201}{2} + \frac{601}{6} + \frac{1201}{12} + \frac{2001}{20} + \ldots + \frac{9001}{90} =$$

$$= \left(100 + \frac{1}{2}\right) + \left(100 + \frac{1}{6}\right) + \left(100 + \frac{1}{12}\right) + \left(100 + \frac{1}{20}\right) + \ldots + \left(100 + \frac{1}{90}\right) =$$

$$= 100 \cdot 9 + \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{9 \cdot 10}\right) = 900 + \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 900 + \frac{9}{10} = \frac{9009}{10} < 1000$$

II. Observăm că a, b sunt cifre. Relația devine

$$\frac{\overline{a,(b)} + \overline{b,(a)}}{a+b} = \frac{a+b}{3a} \Leftrightarrow \frac{\frac{\overline{ab}-a}{9} + \frac{\overline{ba}-b}{9}}{a+b} = \frac{a+b}{3a} \Leftrightarrow \frac{\frac{10a+b-a+10b+a-b}{9}}{a+b} = \frac{a+b}{3a} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{10(a+b)}{9}}{a+b} = \frac{a+b}{3a} \Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{a+b}{3a} \Leftrightarrow 30a = 9a + 9b \Leftrightarrow 21a = 9b \Leftrightarrow 7a = 3b \Leftrightarrow a = 3,\ b = 7.$$

III. **a)** Notăm cu x lungimea segmentului [OA]

$\Rightarrow AB = OA = x$, $BC = x$, $CD = 2x$, $DE = 3x$, $EF = 5x$

Notăm cu M mijlocul segmentului CD $\Rightarrow CM = MD = \frac{CD}{2} = x$. Arătăm că $[OM] \equiv [ME]$.

$OM = OA + AB + BC + CM = x + x + x + x = 4x$; $ME = MD + DE = x + 3x = 4x$

Deci M este mijlocul segmentului [OE].

b) $\frac{AC}{BE} + \frac{BC}{CD} + \frac{AB}{AD} = \frac{2x}{6x} + \frac{x}{2x} + \frac{x}{4x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \geq \frac{11}{12} = \frac{BF}{AF}$

IV. a) 1° + 2° + … + 15° = 120°

$m(\sphericalangle A_1OA_4) = 6^\circ$

$m(\sphericalangle A_{13}OA_{16}) = m(\sphericalangle A_1OA_{16}) - m(\sphericalangle A_1OA_{13}) = 120 - 78 = 42^\circ$

b) $m(\sphericalangle A_4OA_{13}) = m(\sphericalangle A_1OA_{13}) - m(\sphericalangle A_1OA_4) = 78 - 6 = 72^\circ$

$m(\sphericalangle MON) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle A_1OA_4) + \frac{1}{2}m(\sphericalangle A_{13}OA_{16}) + m(\sphericalangle A_4OA_{13}) = 86^\circ$