Inspectoratul Şcolar al Judeţului Satu Mare

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - faza locală
23 ianuarie 2010
Clasa a-VII-a

I. Fie $A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + ... + \frac{\sqrt{2010}-\sqrt{2009}}{\sqrt{2010 \cdot 2009}}$

(4p) a) Demonstraţi că $A \in (0;1)$

(3p) b) Aflaţi partea întreagă a numărului $\sqrt{2010} \cdot A$

(prof.Baciu Nicolae – inspector şcolar de specialitate I.S.J., Satu Mare)

II. Fie $a, b, c \in Q_+^*$ astfel încât $\frac{a+2b}{2a+3b+4c} = \frac{b+2c}{2b+3c+4a} = \frac{c+2a}{2c+3a+4b}$. Arătaţi că

(4p) a) $\sqrt{\frac{a+2b}{2a+3b+4c} + \frac{b+2c}{2b+3c+4a} + \frac{c+2a}{2c+3a+4b}} \in N$

(3p) b) $\sqrt{\frac{\sqrt{2ab}}{2a+3b+4c} + \frac{\sqrt{2bc}}{2b+3c+4a} + \frac{\sqrt{2ca}}{2c+3a+4b}} \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

(prof. Bud Adrian -Liceul Teoretic Negreşti Oaş)

III. Fie triunghiul isoscel ABC, AB = AC, cu $m(\sphericalangle A) > 90^\circ$. Se prelungeşte segmentul [AC] cu un segment [CD] astfel încât AC = CD, iar segmentul [BC] se prelungeşte cu un segment [CE] astfel ca BC = CE. Mediatoarea segmentului [AD] intersectează pe BA în F. Pe această mediatoare se ia un punct T astfel încât CF = CT.

a) Să se arate că punctele T, D şi E sunt coliniare
b) Poate fi patrulerul BFET pătrat ?
c) În cazul când $DF \perp BE$, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC
d) Arătaţi că patrulaterul ATDF este romb.

(prof.Chiorean Vasile – Şc. nr. 2 Carei)

IV. Se consideră trapezul isoscel ABCD, AB || CD, cu AD = BC = DC = 12 cm şi măsura unghiului A este de 60°. Fie MN linia mijlocie a trapezului ($M \in AD$) care se intersectează cu diagonalele în P şi Q, $P \in [AC]$.

a) Arătaţi că semidreapta (AC este bisectoarea unghiului A
b) Calculaţi lungimea segmentului [PQ]
c) Demonstraţi că triunghiul DEQ este echilateral, unde $DE \perp AB$, $E \in AB$
d) Demonstraţi că $DP \perp EQ$

(prof.Culic Camelia – Şc. cu cls. I-VIII L.Blaga, Satu Mare)

Nota: Timp de lucru 3 ore
Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

Bareme de corectare – clasa a-VII-a

I. a) $A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} + ... + \frac{\sqrt{2010}}{\sqrt{2010}\cdot\sqrt{2009}} - \frac{\sqrt{2009}}{\sqrt{2010}\cdot\sqrt{2009}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2010}} \in (0,1)$

b) $\sqrt{2010}\cdot A = \sqrt{2010} - 1 \Rightarrow [A] = 44 - 1 = 43$

II. . a)

$$\frac{a+2b}{2a+3b+4c} = \frac{b+2c}{2b+3c+4a} = \frac{c+2a}{2c+3a+4b} = \frac{a+2b+b+2c+c+2a}{2a+3b+4c+2b+3c+4a+2c+3a+4b} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{a+2b}{2a+3b+4c} + \frac{b+2c}{2b+3c+4a} + \frac{c+2a}{2c+3a+4b}} = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 1 \in N$$

b) Din $\frac{a+2b}{2a+3b+4c} = \frac{b+2c}{2b+3c+4a} = \frac{c+2a}{2c+3a+4b} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2a+3b+4c = 3(a+2b)$ si analoagele.

$$\frac{\sqrt{2ab}}{2a+3b+4c} = \frac{\sqrt{2ab}}{3(a+2b)} \le \frac{\frac{a+2b}{2}}{3(a+2b)} = \frac{1}{6}$$ si analoagele.

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2ab}}{2a+3b+4c} + \frac{\sqrt{2bc}}{2b+3c+4a} + \frac{\sqrt{2ca}}{2c+3a+4b}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2ab}}{3(a+2b)} + \frac{\sqrt{2bc}}{3(b+2c)} + \frac{\sqrt{2ca}}{3(c+2a)}} \le \sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{3}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

III. a) ABDE şi ATDF – paralelograme, deci DT || BF şi DE || BF. Cum prin D se poate duce o singură paralelă la BF rezultă că punctele T, D, E sunt coliniare.

b) BFET este paralelogram. Pentru a fi pătrat trebuie ca BE $\perp$ FT.
Din FT $\perp$ BE şi FT $\perp$ AD rezultă A, B, C sunt coliniare., ceea ce contravine cu ipoteza că ABC este triunghi, deci BFET nu poate fi pătrat.

c) Fie FD $\cap$ CE = {P}.
Deoarece FT este mediatoarea [AD], rezultă că ΔAFD este isoscel cu $\prec FDA \equiv \prec FAD$.
De asemenea, ΔABC este isoscel cu [AB]$\equiv$[AC], deci $\prec B \equiv \prec C$
$\prec$FAD este exterior ΔABC deci m($\prec$FAD) = m($\prec$FDA) = 2m($\prec$ACB)
Deoarece FD $\perp$ BE, în ΔPCD dreptunghic avem m($\prec$PDC)+m($\prec$PCD)=90°
m($\prec$PCD) = m($\prec$ACB) (opuse la vârf)
Se obține m($\prec$PDC)+m($\prec$PCD) = 3m($\prec$ACB) = 90°, de unde m($\prec$ACB)= 30°
În ΔABC: m($\prec$ACB) = m($\prec$ABC) = 30°, deci m($\prec$BAC) = 120°

d) Diagonalele patrulaterului ATDF se înjumătățesc şi sunt perpendiculare, deci ATFD este romb.

IV. a) Triunghiul ADC este isoscel cu AD = DC, deci m($\prec$DAC) = m($\prec$DCA)
Dar m($\prec$DCA) = m($\prec$CAB) (alterne interne)
Rezultă că m($\prec$DAC) = m($\prec$CAB), deci (AC este bisectoarea $\prec$A

b) În ΔABC se obține m($\prec$ACB) = 90°, de unde AB = 24 cm. ; $PQ = \frac{AB - DC}{2} = 6$ cm

c) m($\prec$ADB) = m($\prec$ACB) = 90°; m($\prec$ADE0 = 30° de unde m($\prec$EDB) = 60°
În ΔDEB dreptunghic, EQ este mediană corespunzătoare ipotenuzei; $EQ = \frac{DB}{2} = DQ$,
de unde se obține că ΔDEQ este isoscel şi are un unghi cu măsura de 60°, deci este echilateral.

d) DP este mediană corespunzătoare bazei în ΔADC isoscel, deci DP $\perp$ AC
m($\prec$QEB) = 180° - 90° - 60° = 30°
$\prec$QEB şi $\prec$CAB sunt corespondente, deci AC || EQ, de unde DP $\perp$ EQ