Inspectoratul Şcolar al Judeţului Satu Mare

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - faza locală
23 ianuarie 2010
Clasa a-VIII-a

I. a) Să se arate că $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1} \notin Q$

b) Să se arate că $\left(\frac{\sqrt{26}+1}{5}\right)^{2010} + \left(\frac{\sqrt{26}-1}{5}\right)^{2010} > 2$

(prof.Baciu Nicolae – Inspector şcolar de specialitate I.S.J., Satu Mare)

II. Fie $a, b, c \in R_+^*$ astfel încât $a+b+c=1$. Arătaţi că

(2p) a) $1+\frac{a+b}{2} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{2}}$

(5p) b) $a\sqrt{\frac{b+c}{2}} + b\sqrt{\frac{c+a}{2}} + c\sqrt{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{3}{4}$

(prof. Bud Adrian -Liceul Teoretic Negreşti Oaş)

III. Pe planul rombului ABCD cu $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$ şi AB = 2 cm se ridică în A o perpendiculară pe care se ia un punct P astfel încât AP = 3 cm. Dacă M este un punct variabil pe segmentul (PC), se cere:

a) măsura unghiului format de planele (PBD) şi (ABC)
b) măsura unghiului format de dreptele AM şi BD
c) aria minimă a triunghiului MBD

(prof.Culic Camelia – Şc. cu cls. I-VIII L.Blaga, Satu Mare)

IV. (7p) Segmentele [AB] şi [CD] sunt situate pe drepte necoplanare, M este mijlocul segmentului [AB], iar N∈ [CD] astfel încât CN = 3ND. Notăm cu X, Y, Z, T punctele X∈ [CM] cu 3MX = XC, Y∈ [AN] cu AN = 2AY, Z∈ [MD] cu MZ = 3ZD, T∈ [BN] cu BN = 2BT. Justificaţi coplanaritatea punctelor X, Y, Z şi T.

(Prof. Braica Petru, Şc, Gr. Moisil Satu Mare)

Notă: Timp de lucru 3 ore
Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

Bareme de corectare – clasa a-VIII-a

I. a) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+1)}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{2}$ **;** Se notează $a=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1$

Pres. $a\in Q$; $\sqrt{6}+\sqrt{3}=a+1+\sqrt{2}\Rightarrow(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2=(a+1+\sqrt{2})^2\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{a^2+2a-6}{4-2a}\in Q$ fals

b)

$\left(\frac{\sqrt{26}+1}{5}\right)^2=b\Rightarrow\frac{\sqrt{26}-1}{5}=\frac{26-1}{5(\sqrt{26}+1)}=\frac{5}{\sqrt{26}+1}=\frac{1}{b}$; $b^{2010}+\frac{1}{b^{2010}}>2\Leftrightarrow(b^{2010}-1)^2>0$

II. . a) Se aplica $m_a\geq m_g$ pentru numerele 1 şi $\frac{a+b}{2}$.

b) din punctul a) avem $a\sqrt{\frac{b+c}{2}}\leq\frac{a\left(1+\frac{b+c}{2}\right)}{2}=\frac{a}{2}+\frac{a(b+c)}{4}$ şi analoagele.

Din ipoteză avem

$a+b+c=1\,\left|^2\right.\Leftrightarrow(a+b+c)^2=1\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=1\Rightarrow 2(ab+ac+bc)=1-(a^2+b^2+c^2)$

Relația devine

$a\sqrt{\frac{b+c}{2}}+b\sqrt{\frac{c+a}{2}}+c\sqrt{\frac{a+b}{2}}\leq\frac{a}{2}+\frac{a(b+c)}{4}+\frac{b}{2}+\frac{b(c+a)}{4}+\frac{c}{2}+\frac{c(a+b)}{4}=\frac{a+b+c}{2}+\frac{2(ab+ac+bc)}{4}=$

$=\frac{1}{2}+\frac{1-(a^2+b^2+c^2)}{4}=\frac{3}{4}-\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\leq\frac{3}{4}$

III. a) Fie {O}= AC $\cap$ BD, deci AC $\perp$ BD ; (PBD) $\cap$ (ABC) = BD

AO $\perp$ BD, AO $\subset$ (ABC) (1)

$\Delta PAB\equiv\Delta PAD$ (C.C.), de unde PB = PD, deci ΔPBD este isoscel cu PO mediană corespunzătoare bazei, adică PO este înălțime în ΔPBD

Rezultă PO $\perp$ BD, PO $\subset$(PBD) (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow m(\sphericalangle(PBD),(ABC))=m(\sphericalangle AOP)$. În ΔPAO $tg(\sphericalangle AOP)=\frac{AP}{AO}=\sqrt{3}\Rightarrow m(\sphericalangle AOP)=60^\circ$

b) Din a) $\Rightarrow BD\perp(AOP)$ (3)

Punctele A, O, C coliniare $\Rightarrow C\in(AOP)\Rightarrow PC\subset(AOP)\Rightarrow M\in(AOP)\Rightarrow AM\subset(AOP)$ (4)

Din (3) şi (4) $\Rightarrow BD\perp AM\Rightarrow m(\sphericalangle BD,AM)=90^\circ$

c) Din b) $\Rightarrow BD\perp(AOP)=(PAC)$; $MO\subset(PAC)\Rightarrow MO\perp BD$

$A_{MBD}=\frac{MO\cdot BD}{2}=MO$; Aria ΔMBD este minimă pentru MO minim, deci pentru $OM\perp PC$

$A_{POC}=\frac{OC\cdot PA}{2}=\frac{OM\cdot PC}{2}$; $PC=\sqrt{21}$ (din teorema lui Pitagora în ΔPAC)

$\Rightarrow OM=\frac{3\sqrt{7}}{7}\Rightarrow \min A_{MBD}=\frac{3\sqrt{7}}{7}cm^2$

IV. În planul triunghiului MCD avem

$$\left.\begin{array}{l}\frac{CM}{XM}=\frac{3}{1}=\frac{CN}{ND}\overset{R.T.Thales}{\Rightarrow}XN\parallel MD\\ \frac{DZ}{AM}=\frac{1}{3}=\frac{DN}{NC}\overset{R.T.Thales}{\Rightarrow}NZ\parallel MC\end{array}\right\}\Rightarrow$$ MXNZ este paralelogram, deci $XZ\cap MN=\{O\}$ şi O este mijlocul [MN].

În planul triunghiului NAB, se arată folosind linii mijlocii că MTNY este paralelogram, de unde $YT\cap MN=\{O\}$. Deci segmentele [XZ] şi [TY] sunt (XYZT este chiar paralelogram), deci punctele X, Y, Z, T sunt coplanare.