Triunghiul

Fie A, B, C trei puncte necoliniare.

ΔABC = [AB] $\cup$ [BC] $\cup$ [CA] şi se numeşte triunghi cu vârfurile A, B, C, laturile [AB], [AC], [BC] şi unghiurile $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.

Notații :AB = c, AC = b, BC = a.

P_{ABC}=a+b+c este perimetrul ΔABC

$p_{ABC} = \frac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul ΔABC

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180^o.

Un unghi exterior al unui unghi al triunghiului are măsura egală cu suma măsurilor celorlalte două unghiuri ale triunghiului.

Linii importante în triunghi

a) Bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului sunt concurente în I, care reprezintă centrul cercului înscris în triunghi, care are raza r, egală cu distanța de la I la oricare dintre laturile triunghiului.
b) Mediatoarele laturilor triunghiului sunt concurente în O, care reprezintă centrul cercului circumscris triunghiului, care are raza R, egală cu distanța de la O la oricare dintre vârfurile triunghiului.
c) Medianele triunghiului(segmentele cu o extremitate într-un vârf al triunghiului şi cealaltă în mijlocul laturii opuse) sunt concurente în G, care se numeşte centrul de greutate al triunghiului şi se află la o treime din mediană de mijlocul laturii corespunzătoare ei.
d) Înălțimile triunghiului(segmentele cu o extremitate într-un vârf al triunghiului şi cealaltă în piciorul perpendicularei duse din vârf pe suportul laturii opuse) sunt concurente în H, care se numeşte ortocentrul triunghiului.

Linia mijlocie în triunghi este segmentul cu extremitățile în mijloacele a două laturi ale triunghiului; este paralelă cu a treia latură şi este jumătate din aceasta.

Teoremă : Segmentul cu o extremitate îm mijlocul unei laturi a unui triunghi, cu cealaltă pe altă latură a triunghiului şi care este paralel cu a treia latură a triunghiului, este linie mijlocie în triunghi.

Clasificarea triunghiurilor după laturi

a) oarecare – triunghiul nu are două laturi congruente;
b) isoscel - triunghiul are două laturi congruente(a treia se numeşte bază);
c) echilateral - triunghiul are toate laturile congruente.

Clasificarea triunghiurilor după unghiuri

a) ascuțitunghic – are toate unghiurile ascuțite;
b) dreptunghic – are un unghi drept(laturile care îl formează se numesc catete, iar cealaltă ipotenuză);
c) obtuzunghic – are un unghi obtuz.

Proprietățile triunghiului isoscel

a) unghiurile alăturate bazelor sunt congruente;

b) liniile importante corespunzătoare bazei sunt incluse în aceeaşi dreaptă;

c) înălțimile(respectiv medianele, bisectoarele) corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente;

d) triunghiul isoscel cu un unghi de 60^o este echilateral.

Proprietățile triunghiului echilateral

a) unghiurile au câte 60^o;

b) O = I = G = H;

Definiție : Două triunghiuri ABC şi EFG sunt congruente $\Leftrightarrow$ au laturile respectiv congruente şi unghiurile respectiv congruente(se scrie Δ ABC $\equiv$ Δ EFG).

Cazurile de congruență ale triunhgiurilor oarecare

a) LLL: Două triunghiuri sunt congruente $\Leftrightarrow$ au laturile respectiv congruente.

b) LUL: Două triunghiuri sunt congruente $\Leftrightarrow$ două laturi ale unuia sunt congruente cu două laturi ale celulilalt, iar unghiurile formate de aceste laturi sunt respectiv congruente.

c) ULU sau LUU: Două triunghiuri sunt congruente $\Leftrightarrow$ două unghiuri şi o latură ale unuia sunt respectiv congruente cu două unghiuri şi o latură ale celuilalt.

Cazurile de congruență ale triunhgiurilor dreptunghice

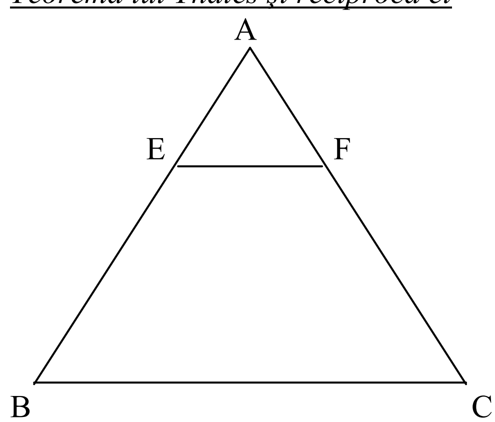
a) CC: Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente $\Leftrightarrow$ au catetele respectiv congruente.

b) CU: Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente $\Leftrightarrow$ o catetă şi un unghi ascuțit ale unuia sunt respectiv congruente cu o catetă şi un unghi ascuțit ale celuilalt.

c) IU: Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente $\Leftrightarrow$ au ipotenuzele congruente şi un unghi ascuțit al unuia este congruent cu un unghi ascuțit al celuilalt.

d) IC: Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente $\Leftrightarrow$ au ipotenuzele congruente şi o catetă a unuia este congruentă cu o catetă a celuilalt.

Teorema lui Thales şi reciproca ei



EF // BC $\Leftrightarrow \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{BE}{FC}$

Definiție :Un triunghi ABC este asemenea cu un triunghi EFG (se scrie Δ ABC ~ Δ EFG) $\Leftrightarrow$ $\hat{A} \equiv \hat{E}, \hat{B} \equiv \hat{F}, \hat{C} \equiv \hat{G}$, $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AC}{EG} = \dfrac{BC}{FG}$.

Cazurile de asemănare ale triunghiurilor

a) LLL: Două triunghiuri sunt asemenea $\Leftrightarrow$ au laturile respectiv proporționale.

b) LUL: Două triunghiuri sunt asemenea $\Leftrightarrow$ un unghi al unuia este congruent cu un unghi al celuilalt şi laturile care formează unghiurile respective sunt respectiv proporționale.

c) UU: Două triunghiuri sunt asemenea $\Leftrightarrow$ două unghiuri ale unuia sunt respectiv congruente cu două unghiuri ale celuilalt.

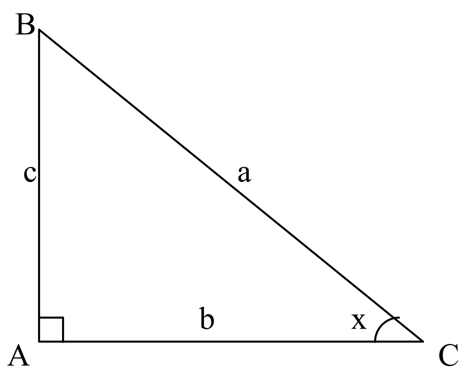
Teorema înălțimii: Înălțimea ipotenuzei este media proporțională a proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

Teorema catetei: Oricare dintre catete este media proporțională a ipotenuzei şi proiecției ei pe ipotenuză.

Teorema lui Pitagora: Suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei.

Reciproca teoremei lui Pitagora: Dacă suma pătratelor a două laturi ale unui triunghi este egală cu pătratul celei de-a treia, atunci triunghiul este dreptunghic.

Elemente de trigonometrie



$\sin x = \frac{c}{a}$; $\cos x = \frac{b}{a}$; $\text{tg } x = \frac{c}{b}$; $\text{ctg } x = \frac{b}{c}$.

Proprietăți:

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
2) $\sin x = \sin(180^\circ - x)$;
3) $\cos x = -\cos(180^\circ - x)$;
4) $\sin x = \cos(90^\circ - x)$;
5) $\text{tg } x = \text{ctg } (90^\circ - x)$;
6) $\sin 0^\circ = 0$; $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 90^\circ = 1$.

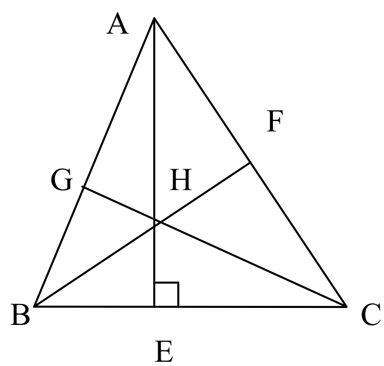
Inegalități între elementele triunghiului

1) În orice triunghi unui unghi mai mare i se opune o latură mai mare şi unei laturi mai mari i se opune un unghi mai mare.
2) În orice triunghi oricare dintre laturi este mai mare decât diferența celorlalte două şi mai mică decât suma acestora.

Alte teoreme utile în triunghiul ABC

a) $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, unde m_a este mediana din A;
b) teorema bisectoarei: bisectoarea interioară a unui unghi al triunghiului determină pe latura opusă segmente proporționale cu laturile unghilui respectiv;
c) teorema cosinusului: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$;
d) teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

<u>Aria triunghiului</u> este semiprodusul oricărei laturi cu înălțimea corespunzătoare.



$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AE}{2} = \frac{AC \cdot BF}{2} = \frac{AB \cdot CG}{2}$$

<u>Alte formule</u> :

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = r \cdot p =$$

semiprodusul a două laturi cu sinusul unghiului format de ele.

Dacă triunghiul este echilateral, aria este egală cu $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, iar dacă este dreptunghic aria este egală cu semiprodusul catetelor.