CONCURSUL DE MATEMATICĂ
ISOSCEL
Ediţia a IV-a – 31.X.2009

CLASA A V-A

SUBIECTUL I (40 puncte) Pe foaia de examen scrieţi doar răspunsurile (rezultatele):

(10p) 1. Să se compare numerele:

$$A = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + ... + 3 \cdot 9;$$
$$B = 1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + ... + 28 + 29 - 30.$$

(10p) 2. Răzvan s-a rătăcit în pădure. El a mers 2 km spre est, 2 km spre nord, 3 km spre est, 1 km spre sud, 2 km spre vest şi 1 km spre sud. Cât de departe este Răzvan de punctul din care a plecat?

(10p) 3. Suma punctelor de pe feţele opuse ale oricărui zar este 7. Maria a construit un turn format din 7 zaruri puse unul peste altul şi a observat că suma punctelor de pe feţele vizibile ale ultimului zar (cel de sus) este 17. Care este suma punctelor de pe feţele orizontale care nu se văd ale celor 7 zaruri?

(10p) 4. Un elev a citit dintr-o carte primele n pagini şi a observat că pentru numerotarea acestora s-a folosit de 23 de ori cifra 3. Aflaţi cea mai mică şi cea mai mare valoare a lui n.

SUBIECTUL II (25 puncte)

Împăratul Roşu are 500 de perle verzi şi roşii. Dorind să aibă numai perle roşii, el face schimb cu vecinul său, împăratul Verde. Acesta oferă 5 perle roşii pentru fiecare 13 perle verzi. După schimb, împăratul Roşu are 300 de perle roşii. Câte perle roşii a avut iniţial împăratul Roşu?

SUBIECTUL III (25 puncte)

La ora de matematică, fiecare din cei 25 de elevi ai clasei a V-a primeşte câte un cartonaş pe care este scris un număr natural nenul. Fiecare elev împarte numărul de pe cartonaş la 24 şi comunică profesorului restul obţinut la împărţire. Suma resturilor obţinute este 288. Elevul Daniel constată că resturile obţinute de colegii săi sunt diferite, iar câtul şi restul obţinute de el sunt egale.

a) (15p) Ce număr este scris pe cartonaşul lui Daniel?

b) (10p) Aflaţi suma numerelor scrise pe cele 25 de cartonaşe, ştiind că fiecare elev, în afara lui Daniel, a obţinut câtul cu 1 mai mare decât restul.

NOTĂ. Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
ISOSCEL
Ediţia a IV-a – 31.X.2009

CLASA A VI-A

SUBIECTUL I (40 puncte)

Pe foaia de examen scrieţi doar răspunsurile (rezultatele):

(10p) 1. Numerele naturale a şi b au $(a,b) = 12$ şi $[a,b] = 72$. Aflaţi toate valorile posibile ale sumei $a + b$.

(10p) 2. Determinaţi câtul c şi restul r al împărţirii numărului $\overline{acar}$ la $\overline{ac}$, ştiind că $r = c+2$.

(10p) 3. Aflaţi numărul natural $\overline{abc}$ ştiind că este cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{2009abc}$ şi $\overline{abc2009}$.

(10p) 4. Să se afle numărul mulţimilor $A = \{a,b,c,d\} \subset \{1,2,...,2009\}$ cu proprietatea $a + d = b + c = 2009$.

SUBIECTUL II (25 puncte)

Fie M mulţimea tuturor numerelor naturale de 100 de cifre, scrise numai cu cifrele 2 şi 6.

(5p) a) Arătaţi că suma cifrelor oricărui element din M este divizibilă cu 4.

(10p) b) Arătaţi că dacă $a,b \in M$, atunci $a + b \notin M$.

(10p) c) Arătaţi că niciun element $x \in M$ nu este pătrat perfect.

SUBIECTUL III (25 puncte)

Pe semidreapta $(OX$ se consideră punctele A_1, A_2, ..., A_{2009} în această ordine, astfel încât $OA_1 = 1$ cm, $A_1A_2 = 2$ cm, $A_2A_3 = 3$ cm, ..., $A_{2008}A_{2009} = 2009$ cm.

(5p) a) Să se calculeze lungimea segmentului $[OA_{2009}]$.

(10p) b) Să se arate că dublul lungimii segmentului $[OA_k]$ nu este pătrat perfect, pentru nicio valoare $k \in \{1,2,...,2009\}$.

(10p) c) Să se determine numărul natural k pentru care segmentele $[A_1A_k]$ şi $[A_4M]$ au acelaşi mijloc, unde M este mijlocul segmentului $[A_2A_k]$.

NOTĂ. Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
ISOSCEL
Ediţia a IV-a – 31.X.2009

CLASA A VII-A

SUBIECTUL I (40 puncte) Pe foaia de examen scrieţi doar răspunsurile (rezultatele):

(10p) 1. Determinaţi numerele naturale a, b, c ştiind că $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{3c+5}{2c+1}$.

(10p) 2. În jurul punctului O se consideră unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$ şi $\widehat{EOA}$ astfel încât măsurile lor sunt direct proporţionale cu 5 numere naturale consecutive. Ştiind că $m(\widehat{BOE}) = 3m(\widehat{AOB})$, să se afle măsura unghiului $\widehat{AOD}$.

(10p) 3. La o petrecere au fost 38 de copii, băieţi şi fete. Andrei a adus flori pentru 5 fete, Bogdan a adus flori pentru 6 fete, Cristi pentru 7 fete şi aşa mai departe, ultimul băiat aducând flori pentru toate fetele. Câte fete au fost la petrecere?

(10p) 4. Să se calculeze suma numerelor naturale de două cifre care au o cifră pară şi una impară.

SUBIECTUL II (25 p)
În triunghiul alăturat, mergând de sus în jos, putem uni literele vecine, formând cuvinte.

						I						
					S		S					
				O		O		O				
			S		S		S		S			
		C		C		C		C		C		
	E		E		E		E		E		E	
L		L		L		L		L		L		L

(10p) a) În câte moduri putem citi cuvântul $ISOS$?
(15p) b) În câte moduri putem citi cuvântul $ISOSCEL$?

SUBIECTUL III (25 p)
Se consideră mulţimea $A = \{10^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 \cdot 10^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{5 \cdot 10^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
(15p) a) Arătaţi că orice număr natural de 5 cifre distincte se poate scrie ca suma a maxim 12 elemente din A.
(10p) b) Determinaţi cel mai mic număr natural p pentru care este adevărată afirmaţia:
„*Orice număr natural de n cifre se poate scrie ca suma a maxim p elemente din A.*“

NOTĂ. Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
ISOSCEL
Ediţia a IV-a – 31.X.2009

CLASA A VIII-A

SUBIECTUL I (40 puncte)

Pe foaia de examen scrieţi doar răspunsurile (rezultatele):

(10p) 1. Eugen şi Florin se iau la întrecere. Florin are pasul mai mic cu 10% decât Eugen, dar, în acelaşi interval de timp, Eugen face cu 10% mai puţini paşi decât Florin. Care dintre ei aleargă mai repede?

(10p) 2. Ştiind că $a+b=9$, calculaţi $E=a\left(a^2+4a+4\right)+b\left(b^2+4b+4\right)+ab\left(3a+3b+8\right)$.

(10p) 3. Aflaţi numerele naturale care adunate cu 58, respectiv 173, dau de fiecare dată un pătrat perfect.

(10p) 4. Fie $a=1+2+2^2+...+2^{2007}$ şi $b=1+3+3^2+...+3^{2007}$. Comparaţi numerele $(a+1)^3$ şi $(2b+1)^2$.

SUBIECTUL II (25 p)

Numărul $\overline{abcd}$ este scris în baza 10 cu cifre nenule. Dacă $a\leq b\leq c\leq d$, să se determine valoarea minimă a sumei $S=\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$ şi numărul $\overline{abcd}$ pentru care se atinge această valoare.

SUBIECTUL III (25 p)

George are o listă cu numerele lui norocoase (cel puţin două). Horia îl provoacă pe George la următorul joc: va scrie pe tablă p numere naturale a_1, a_2, ..., a_p, la alegerea lui George, apoi acesta, la fiecare etapă a jocului, poate şterge orice număr de pe tablă care este suma a 8 numere aflate pe lista cu numerele norocoase, scriindu-le în schimb pe acestea. George câştigă dacă, în urma unui număr oarecare de etape ale jocului, pe tablă se află 64 de numere din lista norocoasă.

(10p) a) Arătaţi că pentru $p=1$, George poate câştiga jocul şi indicaţi o configuraţie câştigătoare.

(15p) b) Arătaţi că pentru $p=2$, George pierde jocul, indiferent de componenţa listei cu numerelor norocoase şi de numerele a_1 şi a_2.

NOTĂ. Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii.