

# Concursul de matematică „NICOLAE COCULESCU” 2009

## Soluțiile problemelor date la concurs

### Clasa a VIII-a

1. Notăm  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Deoarece  $SABC$  este echifacial, obținem congruențele  $\triangle ABC \equiv \triangle SCB$  și  $\triangle BCA \equiv \triangle SAC$ , de unde rezultă  $SA = a$ ,  $SB = b$  și  $SC = c$ .

Deoarece  $\widehat{MAD} \equiv \widehat{DAB} \equiv \widehat{ADM}$ , rezultă că triunghiul  $MAD$  este isoscel, deci  $[MD] \equiv [MA]$ . Folosind teorema lui Thales și teorema bisectoarei în triunghiul  $ASB$ , rezultă

$$\frac{MA}{MS} = \frac{DB}{DS} = \frac{AB}{AS} \Rightarrow \frac{MA}{MA+MS} = \frac{AB}{AB+AS} \Leftrightarrow \frac{MA}{SA} = \frac{AB}{AB+AS} \Rightarrow MA = MD = \frac{ac}{a+c}.$$

Analog obținem  $NE = \frac{ab}{a+b}$  și  $PF = \frac{bc}{b+c}$ . Inegalitatea de demonstrat  $2(MD + NE + PF) \leq AB + BC + CA$  se scrie

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ac}{c+a} \leq a+b+c,$$

și se obține aplicând inegalitatea mediilor armonică și geometrică:  $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$  și analoagele.

2. Fie  $p$  un divizor prim al produsului  $abc$ . Este suficient să arătăm că exponentul la care apare  $p$  în descompunerea în factori primi a lui  $abc$  este mai mic sau egal cu exponentul lui  $p$  în descompunerea în factori primi a lui  $(a+b+c)^7$ .

Fie  $a = p^u x$ ,  $b = p^v y$  și  $c = p^t z$ , unde  $x, y, z \geq 1$  sunt numere naturale nedivizibile cu  $p$ , iar  $u, v, t \in \mathbb{N}$ . Exponentul lui  $p$  în descompunerea în factori primi a lui  $abc$  este  $u+v+t$ , iar exponentul lui  $p$  în descompunerea lui  $a+b+c$  este cel puțin egal cu  $w = \min(u, v, t)$ . Este suficient să arătăm că  $u+v+t \leq 7w$ .

Deoarece  $b \mid a^2$ ,  $c \mid b^2$  și  $a \mid c^2$ , rezultă  $v \leq 2u$ ,  $t \leq 2v$  și  $u \leq 2t$ , de unde obținem și  $v \leq 4t$ ,  $t \leq 4u$  și  $u \leq 4v$ . Ca urmare,  $u+v+t \leq w+2w+4w = 7w$ .

3. Se observă că  $x > 0$ ,  $y > 0$  și  $z > 0$ . Relațiile din enunț pot fi scrise sub forma

$$\begin{aligned} x(7y^2 + z^2) &= (y^2 + 4)(x^2 + y^2) \\ y(7z^2 + x^2) &= (z^2 + 4)(y^2 + z^2) \\ z(7x^2 + y^2) &= (x^2 + 4)(z^2 + x^2) \end{aligned}$$

Aplicând inegalitatea mediilor avem:

$$\begin{aligned} x(7y^2 + z^2) &= (y^2 + 4)(x^2 + y^2) \geq 4y \cdot 2xy = 8xy^2 \Rightarrow 7y^2 + z^2 \geq 8y^2 \Rightarrow z^2 \geq y^2 \\ y(7z^2 + x^2) &= (z^2 + 4)(y^2 + z^2) \geq 4z \cdot 2yz = 8yz^2 \Rightarrow 7z^2 + x^2 \geq 8z^2 \Rightarrow x^2 \geq z^2 \\ z(7x^2 + y^2) &= (x^2 + 4)(z^2 + x^2) \geq 4x \cdot 2zx = 8zx^2 \Rightarrow 7x^2 + y^2 \geq 8x^2 \Rightarrow y^2 \geq x^2 \end{aligned}$$

Ca urmare,  $x^2 = y^2 = z^2$ , și cum  $x, y, z > 0$ , obținem  $x = y = z$ . Din prima ecuație rezultă  $8x^3 = (x^2 + 4) \cdot 2x^2$ , cu soluția  $x = 2$ . În concluzie,  $x = y = z = 2$ .

4. Deoarece  $a < 3a$  și  $2b < 4b$ , rezultă  $a, b > 0$ . Pentru orice număr natural  $n \geq 1$  avem:

$$(2n-1)a < 2nb < (2n+1)a \Leftrightarrow \frac{2n-1}{2n} < \frac{b}{a} < \frac{2n+1}{2n} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2n} < \frac{b}{a} < 1 + \frac{1}{2n} \Leftrightarrow -\frac{1}{2n} < \frac{b}{a} - 1 < \frac{1}{2n},$$

adică  $\left| \frac{b}{a} - 1 \right| < \frac{1}{2n}$ . Presupunând  $\left| \frac{b}{a} - 1 \right| \neq 0$ , rezultă că  $n < \frac{1}{2\left| \frac{b}{a} - 1 \right|}$ , pentru orice număr natural  $n \geq 1$ ,

ceea ce ar însemna că mulțimea numerelor naturale este mărginită de numărul  $\frac{1}{2\left| \frac{b}{a} - 1 \right|}$ , absurd. Ca urmare,

presupunerea făcută este falsă, deci  $\left| \frac{b}{a} - 1 \right| = 0$ , de unde  $a = b$ .