

Concursul de matematică „NICOLAE COCULESCU” 2009

Soluțiile problemelor date la concurs

Clasa a VII-a

1. Pentru $y = 0$ obținem $x + z = \frac{61}{2}$, contradicție, deoarece $x + z \in \mathbb{N}$. La fel, pentru $y = 1$ obținem $x + 1 = \frac{61}{2}$, deci $x \notin \mathbb{N}$. Ca urmare, $y \geq 2$. Analog se arată că $z \geq 2$ (sau din motive de simetrie). Căutăm soluții cu $y, z \geq 2$.

Să observăm că pentru orice $y, z \in \mathbb{N}$, $y, z \geq 2$, avem $\frac{y+z}{1+yz} < 1$. Într-adevăr, această inegalitate este echivalentă cu $1 + yz > y + z \Leftrightarrow yz - y - z + 1 > 0 \Leftrightarrow (y-1)(z-1) > 0$.

Ca urmare, partea întreagă a sumei $x + \frac{y+z}{1+yz}$ este x , iar partea fracționară este $\frac{y+z}{1+yz}$, și cum $\frac{61}{2} = 30\frac{1}{2}$, rezultă $x = 30$ și $\frac{y+z}{1+yz} = \frac{1}{2}$. Ultima relație se scrie:

$$1 + yz = 2y + 2z \Leftrightarrow yz - 2y - 2z = -1 \Leftrightarrow yz - 2y - 2z + 4 = 3 \Leftrightarrow (y-2)(z-2) = 3,$$

cu soluțiile $(y, z) \in \{(3, 5), (5, 3)\}$.

2. Pentru $q = 3$ nu se obține soluție. Ca urmare, $q = 3k + 1$ sau $q = 3k + 2$.

Dacă $q = 3k + 1$, atunci $2^q = 2^{3k+1} = \mathcal{M}_7 + 2$. Atunci $p^3 = 2009 + 47 \cdot (\mathcal{M}_7 + 2) = \mathcal{M}_7 + (\mathcal{M}_7 + 5)(\mathcal{M}_7 + 2) = \mathcal{M}_7 + 3$, care nu este cub perfect, întrucât cuburile perfecte sunt de forma \mathcal{M}_7 sau $\mathcal{M}_7 \pm 1$.

Ca urmare, q este de forma $3k + 2$, de unde obținem $p^3 = 2009 + 47 \cdot 2^{3k+2} = 2009 + 188 \cdot 8^k$.

Presupunând k impar, $k = 2p + 1$, avem:

$$\begin{aligned} p^3 &= 2009 + 188 \cdot 8^{2p+1} = \mathcal{M}_9 + 2 + (\mathcal{M}_9 + 8) \cdot 8^{2p+1} = \mathcal{M}_9 + 2 + \mathcal{M}_9 + 8 \cdot 8^{2p+1} = \\ &= \mathcal{M}_9 + 2 + 8^{2p+2} = \mathcal{M}_9 + 2 + 64^{p+1} = \mathcal{M}_9 + 2 + (\mathcal{M}_9 + 1)^{p+1} = \mathcal{M}_9 + 3, \end{aligned}$$

care nu este cub perfect, întrucât cuburile perfecte sunt de forma \mathcal{M}_9 sau $\mathcal{M}_9 \pm 1$.

În consecință k este par, $k = 2p$, deci $q = 6p + 2$, adică q este par. Cum q este număr prim, rezultă $q = 2$. Se obține $p^3 = 2197 = 13^3$, deci singura soluție este $p = 13$, $q = 2$.

3. (\Rightarrow) Dacă $[AB] \equiv [AC]$, atunci AD este mediatoarea segmentului $[BC]$, deci $[PB] \equiv [PC]$. Evident, $AB + PC = AC + PB$.

(\Leftarrow) Presupunem prin absurd că $[AB] \not\equiv [AC]$ și facem alegerea $AB < AC$. Atunci există $B' \in (AC)$ astfel încât $[AB'] \equiv [AB]$. Deoarece $\triangle PAB \equiv \triangle PAB'$ (L.U.L.), rezultă că $[PB'] \equiv [PB]$. Folosind inegalitatea triunghiului în $\triangle PB'C$ și ipoteza, obținem

$$PC < PB' + B'C = PB + AC - AB = PC,$$

contradicție. Așadar $[AB] \equiv [AC]$.

4. a) Avem $A = \{10, 11, 12, 13\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ și scrierile
$$\begin{cases} 23 = 13 + 9 + 1 \\ 22 = 12 + 8 + 2 \\ 21 = 11 + 7 + 3 \\ 20 = 10 + 6 + 4 \end{cases}.$$

b) Dacă n are proprietatea $P(k)$, cum sumele $a_k + b_k + c_k$ reprezintă k numere naturale mai mici strict decât n , suma lor va fi cel mult egală cu suma celor mai mari k numere naturale nenule strict mai mici decât n , adică

$$(a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) + \dots + (a_k + b_k + c_k) \leq (n-1) + (n-2) + \dots + (n-k) = \frac{k(2n-k-1)}{2}.$$

Pe de altă parte, cele trei k numere naturale din mulțimile A , B , C sunt distincte, deci suma lor este cel puțin egală cu suma primelor $3k$ numere naturale, adică

$$(a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) + \dots + (a_k + b_k + c_k) \geq 1 + 2 + \dots + 3k = \frac{3k(3k+1)}{2}.$$

Ca urmare, $\frac{3k(3k+1)}{2} \leq (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) + \dots + (a_k + b_k + c_k) \leq \frac{k(2n - k - 1)}{2}$, de unde obținem

$$\frac{3k(3k+1)}{2} \leq \frac{k(2n - k - 1)}{2} \Leftrightarrow 3(3k+1) \leq 2n - k - 1 \Leftrightarrow n \geq 5k + 2.$$

c) Relațiile de mai jos exprimă faptul că $5k + 2$ are proprietatea $P(k)$:

			A		B		C	
$n - 1$	$=$	$5k + 1$	$=$	$3k$	$+$	$2k$	$+$	1
$n - 2$	$=$	$5k$	$=$	$(3k - 1)$	$+$	$(2k - 1)$	$+$	2
$n - 3$	$=$	$5k - 1$	$=$	$(3k - 2)$	$+$	$(2k - 2)$	$+$	3
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$n - k + 1$	$=$	$4k + 3$	$=$	$(2k + 2)$	$+$	$(k + 2)$	$+$	$(k - 1)$
$n - k$	$=$	$4k + 2$	$=$	$(2k + 1)$	$+$	$(k + 1)$	$+$	k