

# Concursul de matematică „NICOLAE COCULESCU” 2009

## Soluțiile problemelor date la concurs

### Clasa a V-a

1. Dacă  $n \geq 4$ , atunci  $2^n a + 3^n b \geq 16a + 81b > 10a + b = \overline{ab}$ , contradicție, deci  $n \leq 3$ .
- Pentru  $n = 0$  obținem  $\overline{ab} = a + b$ , de unde  $10a + b = a + b$ , adică  $a = 0$ , imposibil.
  - Pentru  $n = 1$  rezultă  $\overline{ab} = 2a + 3b$ , de unde  $10a + b = 2a + 3b$ . Obținem  $b = 4a$ , cu soluțiile  $a = 1, b = 4$  și  $a = 2, b = 8$ .
  - Pentru  $n = 2$  avem  $10a + b = 4a + 9b$ , de unde  $3a = 4b$ . Avem soluția  $a = 4, b = 3$  și  $a = 8, b = 6$ .
  - Pentru  $n = 3$  obținem  $10a + b = 8a + 27b$ , de unde  $a = 13b$ , care nu conduce la soluții.

2. a) 

|   |   |   |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

      b) 

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $2^4$ | $2^9$ | $2^2$ |
| $2^3$ | $2^5$ | $2^7$ |
| $2^8$ | $2^1$ | $2^6$ |

3. a) Dintre numerele  $1, 2, \dots, 100$  sunt câte 20 de numere de forma  $5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3$  și  $5k + 4$ . Ca urmare,  $S = (0 + 1 + 2 + 3 + 4) \cdot 20 = 200$ .

b) Este evident că  $n \leq 100$ ; în caz contrar, resturile obținute sunt  $1, 2, \dots, 100$ , a căror sumă este mai mare decât 100.

Fie  $q$  și  $r$  câtul și restul împărțirii lui 100 la  $n$ . Atunci numerele  $1, 2, \dots, 100$  pot fi grupate în  $q$  grupe de câte  $n$  numere consecutive care dau resturile  $1, 2, \dots, n - 1$ , respectiv 0 la împărțirea cu  $n$  și încă o grupă de  $r$  numere consecutive, care dau resturile  $1, 2, \dots, r$ . Atunci

$$S = q \cdot [0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1)] + (1 + 2 + \dots + r) = q \cdot \frac{n(n - 1)}{2} + \frac{r(r + 1)}{2}.$$

Dacă  $S = 100$ , atunci  $qn(n - 1) + r(r + 1) = 200$ . Deoarece  $n \leq 100$ , avem  $q \geq 1$ , de unde rezultă că

$$n(n - 1) \leq qn(n - 1) \leq qn(n - 1) + r(r + 1) = 200.$$

Ca urmare,  $n(n - 1) \leq 200$ , și cum  $14 \cdot 13 < 200 < 15 \cdot 14$ , rezultă  $n \leq 14$ . Atunci  $q$  este cel puțin egal cu câtul împărțirii lui 100 la 14, deci  $q \geq 7$ .

Să observăm că dacă  $n \geq 6$ , atunci  $qn(n - 1) + r(r + 1) \geq qn(n - 1) \geq 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ , deci  $n \leq 5$ .

Studiind cazurile  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  se obține o singură soluție:  $n = 3$ .

4. a) Un exemplu este următorul: se colorează cu o culoare numerele pare și cu altă culoare numerele impare.

b) Deoarece restul împărțirii lui  $a + 3b + 9c$  la 3 este același cu restul împărțirii lui  $a$  la 3, putem colora cu o culoare multiplii de 3, cu o altă culoare numerele care dau restul 1 la împărțirea cu 3 și cu a treia culoare numerele care dau restul 2 la împărțirea cu 3.

c) Pornind de la faptul că 1, 5 și 9 au aceeași culoare, să spunem roșu, vom crea noi numere *roșii* folosind faptul că dacă  $a, b$  și  $c$  sunt *roșii*, atunci și  $a + 3b + 9c$  este *roșu*. Avem succesiv:

- 9, 5, 1 roșii  $\Rightarrow 9 + 3 \cdot 5 + 9 \cdot 1 = 33$  este roșu
- 5, 33, 9 roșii  $\Rightarrow 5 + 3 \cdot 33 + 9 \cdot 9 = 185$  este roșu
- 5, 185, 9 roșii  $\Rightarrow 5 + 3 \cdot 185 + 9 \cdot 9 = 641$  este roșu
- 5, 641, 9 roșii  $\Rightarrow 5 + 3 \cdot 641 + 9 \cdot 9 = 2009$  este roșu.

**Observație.** De fapt, construcția acestor sume se face plecând de la 2009. Încercăm să-l scriem pe 2009 sub forma  $a + 3b + 9c$ , unde  $a, b$  și  $c$  sunt numere roșii. Cum 2009 este de forma  $3k + 2$ , vom alege  $a = 5$ , atunci  $3b + 9c = 2009 - 5 = 2004$ , de unde  $b + 3c = 668$ . Alegând acum spre exemplu  $c = 9$ , am putea încerca să arătăm că  $b = 668 - 3 \cdot 9 = 641$  este număr roșu. Raționamentul se continuă în același fel pentru 641 ș.a.m.d.