Concursul National de Matematica
“Arhimede”
Editia a VII-a. Etapa I din 28 noiembrie 2009
Clasa VIII-a

I.(3p) a) Aratati ca numarul:

$$n = \frac{3}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9}$$

se afla in intervalul $\left(\frac{5}{27}, \frac{5}{21}\right)$

(3p) b) Efectuati calculul:

$$\frac{\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{8} + \frac{1}{\sqrt{8}}} : \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{-3} \cdot \sqrt{32}$$

(3p) c) Determinati numerele reale x si y, stiind ca:

$$\left|3\sqrt{3} - x\right| + |y - 2,(2)| = 2^{99} - 8^{33}$$

Cristina Godeanu

II. Fie ABCDA’B’C’D’ un cub avand muchia de 4 cm, in care O si O’ sunt centrele fetelor ABCD, respective A’B’C’D’, iar M este mijlocul lui [CC’].

(3p)a) Daca $\{F\} = OM \cap (A'B'C'D')$ determinati lungimea lui FA’.
(3p)b) Aratati ca A’C II (MB’D)
(3p)c) Aratati ca D’M II (AB’B).

III.a)Sa se arate ca $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, oricare ar fi x,y $\in R_+$.

b) Fie x,y,z trei numere reale pozitive, distincte cel putin doua, pentru care xyz=1. Sa se arate ca:

$$x^2+y^2 + z^2 + xy + yz + zx > \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

c)Sa se arate ca:

$$x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x + 3 > 0, \forall\, x \in R$$

IV. a) Sa se determine numerele natural $\overline{ab}$, astfel incat $\frac{\overline{ab}^2+2009}{\overline{ab}+1} \in N$.

b) Sa se demonstreze ca $\sqrt{6^n + 2009} \notin$Q, pentru orice n $\in N$

C. Ichim

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se noteaza cu un punctaj cuprins intre 1 si 10 puncte (la fiecare subiect se acorda 1 punct din oficiu).
Timp de lucru efectiv: 3ore