Soluții. Cl. a V-a (28 XI 2009)

I. a) $13 \cdot 31 : 13 - 13 \cdot 31 : 31 = 31 - 13 = 18$

b) $[2009 \cdot (2010 - 2008)] : (2010 - 2008) = 2009.$

c) $(666 \cdot 22) : (33 \cdot 222) = (222 \cdot 3 \cdot 22) : (33 \cdot 222) =$

$= 3 \cdot 22 : 33 = 66 : 33 = 2.$

II. a) $a = 55$; $b = 21$. $55 : 21 = 2$ rest 13

b) $5 \cdot (1 + 2 + \dots + 20) = 5 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 50 \cdot 21 = 1050.$

c) Cea mai mică sumă este:

$0 + 1 + \dots + 2009 + 0 = \frac{2009 \cdot 2010}{2} = 2009 \cdot 1005.$

Cea mai mare sumă este:

$2009 + 0 + 1 + \dots + 2009 = 2009 \cdot 1005 + 2009 = 2009 \cdot 1006.$

III. a) Numerele de 3 cifre egale cu răsturnatele lor au forma: $\overline{aba}$.

9 valori pentru a și 10 valori pentru b $\Rightarrow$ avem 90 de numere.

b) Constatăm că nu pot fi de forma $\overline{1bc}$ și $\overline{1xy}$, pentru că nu ar avea loc relația: $\overline{cb1} + \overline{yx1} = 488$.

Căutăm numere de forma $\overline{2ab}$ și $\overline{xy}$.

$$\begin{cases} \overline{2ab} + \overline{xy} = 299 \\ \overline{ba2} + \overline{yx} = 488 \end{cases} \Rightarrow x = 6 \text{ și}$$

$$\begin{cases} \overline{2ab} + \overline{6y} = 299 \\ \overline{ba2} + \overline{y6} = 488 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{ab} + \overline{y} = 39 \\ \overline{ba} + \overline{y} = 48 \end{cases}$$

$\Rightarrow \overline{ba} - \overline{ab} = 9 \Rightarrow b - a = 1.$

Cazul 1. $b = 1$, $a = 0 \Rightarrow 201 + \overline{6y} = 299$, nu are soluție

Cazul 2. $b = 2$, $a = 1 \Rightarrow 212 + \overline{6y} = 299$, $\Rightarrow \overline{6y} = 87$ nu are soluție.

Cazul 3. $b = 3$, $a = 2 \Rightarrow 223 + \overline{6y} = 299 \Rightarrow$

$\overline{6y} = 76$ nu are soluție.

Cazul 4. $b = 4$, $a = 3 \Rightarrow 234 + \overline{6y} = 299 \Rightarrow y = 5.$

$234 + 65 = 299$ și $432 + 56 = 488$.

Așadar, avem soluția: 234 și 65.

Cazul 5. $b = 5$, $a = 4$.

$245 + \overline{6y} = 299$ nu convine.

IV. a) $5^{96}=(5^2)^{48}=25^{48}$ și $3^{144}=(3^3)^{48}=27^{48}$.

Dar $25^{48}<27^{48} \Rightarrow 5^{96}<3^{144}$

b) Vom arăta că $10^{127}<3^{270} \Leftrightarrow 2^{127}\cdot 5^{127}<3^{270}$

Din punctul a) $\Rightarrow 5^{96}<3^{144}$ (*).

Vom arăta că $2^{127}\cdot 5^{31}<3^{126}$.

$2^{127}\cdot 5^{31}=2^{124}\cdot 2^{3}\cdot 5^{31}=8\cdot(2^4)^{31}\cdot 5^{31}=8\cdot 80^{31}$.

$3^{126}=3^2\cdot 3^{124}=9\cdot(3^4)^{31}=9\cdot 81^{31}$.

Dar $8\cdot 80^{31}<9\cdot 81^{31}\Rightarrow 2^{127}\cdot 5^{31}<3^{126}$ (**)

Din (*) și (**) $\Rightarrow 2^{127}\cdot 5^{31}\cdot 5^{96}<3^{144}\cdot 3^{126}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{127}\cdot 5^{127}<3^{270}\Rightarrow 10^{127}<3^{270}\Rightarrow$ numărul 3^{270} are cel puțin 128 de cifre.

Clasa a VI-a

I. a) $a=8^3:2^7+(11\cdot 2^2)^2:44=2^9:2^7+44^2:44=2^2+44=$

$=4+44=48$; $b=3^4\cdot 2^2-3^2\cdot 2^5=3^2\cdot 2^2(3^2-2^3)=36$.

b) c.m.m.m $(48, 36)=144$.

c) $48x+36y=396 \Rightarrow 4x+3y=33 \Rightarrow$

$4x=3\cdot(11-y)\Rightarrow 3\mid 4x\Rightarrow 3\mid x$, dar x = prim $\Rightarrow x=3$.

$\Rightarrow 3y=33-4\cdot 3 \Rightarrow 3y=21\Rightarrow y=7$.

II.

a) $DE=6\text{ cm}\Rightarrow CE=2\cdot DE=12\Rightarrow BE=2\cdot CE=24\Rightarrow$

$AE=2\cdot BE=48$.

b) $AE=32\text{ cm}\Rightarrow BE=16\text{ cm}\Rightarrow BC=8\text{ cm}\Rightarrow CD=4\text{ cm}$.

$\Rightarrow BD=BC+CD=8+4=12\text{ cm}$.

c) Fie $DE=a\Rightarrow CE=2a$, $BE=2\cdot 2a=4a\Rightarrow AE=$

$=2BE=8a$.

AE = minim pentru $a=1\Rightarrow AE=8$, $AB=4$, $BC=2\Rightarrow$

$CD=DE=1$.

III. 1) Dacă un număr este egal cu 0 $\Rightarrow$ produsul lor este egal cu 0, deci este divizibil cu 30.

2) cazul când toate numerele sunt nenule.

a) Vom arăta că cel puțin un număr este par. În caz contrar, toate numerele sunt impare $\Rightarrow$ suma celor 20 de numere este un număr par $\neq 249$. Deci cel puțin un număr este par.

b) Vom arăta că cel puțin un număr este divizibil la 5. În caz contrar, toate numerele nu sunt $\vdots 5$. Cea mai mică sumă este $= 1+2+3+\dots+24-(5+10+15+20) = 300-50 = 250 > 249$.

Deci, cel puțin un număr este $\vdots 5$.

c) Vom arăta că cel puțin un număr este divizibil cu 3. În caz contrar, toate numerele nu sunt divizibile cu 3. Cea mai mică sumă este:

$1+2+3+\dots+30-3(1+2+\dots+10) = 15\cdot 31 - 3\cdot 55 =$

$= 465 - 165 = 300 > 249.$

Deci, cel puțin un număr este divizibil cu 3.

Din a), b), c) și faptul că $(2,3,5)=1 \Rightarrow$ produsul este $\vdots 30$.

IV. a) $x_n \cdot x_{n+1} = (2^n+3^n)(2^{n+1}+3^{n+1})$

dar $u(2^{2k+1}+3^{2k+1}) = 5$

iar unul din numerele n sau $n+1$ este impar $\Rightarrow$ $x_n \cdot x_{n+1} \vdots 5$.

b) Fie $d \neq 1$, $d \mid x_n$ și $d \mid x_{n+1} \Rightarrow d \mid (x_{n+1} - 2x_n) \Rightarrow$ $\Rightarrow d \mid 3^n \Rightarrow d = 3^k$, $k \leq n \Rightarrow 3^k \mid (2^n+3^n) \Rightarrow 3^k \mid 2^n$ absurd.

c) Pentru $n = 2k \rightarrow u(x_n) \in \{3; 7\}$.

Pentru $n = 2k+1 \Rightarrow x_n = 2^{2k+1} + 3^{2k+1} = 2\cdot 2^{2k} + M_3 =$ $= 2\cdot 4^k + M_3 = 2(M_3+1) + M_3 = M_3 + 2$.

Dar orice pătrat perfect este de forma: M_3 sau M_3+1.

Soluții . Cls. a VII-a

I. a) $x < 2^2+2^3+2^4:(-2)^5 \Rightarrow x < 4+8+16:(-32) \Rightarrow$

$x < 12 - \frac{1}{2} \Rightarrow x < 11,5$, $x \in \mathbb{Z}$, x-maxim $\Rightarrow x = 11$.

b) $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow c = 4k$

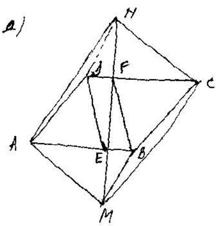
c cifră $\Rightarrow 4k \le 9 \Rightarrow k \in \{0,1,2\}$

$k=0$ nu convine $\Rightarrow k=1 \Rightarrow \overline{abc} = 234$; $k=2 \Rightarrow \overline{abc} = 468$.

c) $\frac{x(5+10+\dots+50)}{12^2} = \frac{-(1+2+\dots+10)}{(-3)^2} \Rightarrow x \cdot 5 \cdot 9 = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 16:5 = 3,2$.

II. a)



1) A, D, N coliniare $\Leftrightarrow$ M, B, C coliniare $\Rightarrow NA \equiv MC$.

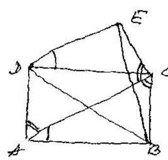
2) A, D, N necoliniare $\Leftrightarrow$ M, B, C necoliniare. $\triangle ADN \equiv \triangle CBM$ (LUL) $\Rightarrow NA \equiv MC$.

În ambele cazuri $AM \equiv NC \Rightarrow AMCN$ paralelogram.

b) $\triangle NDF \equiv \triangle MBE$ (LUU) $\Rightarrow DF \equiv BE$.

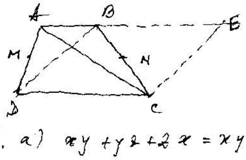
Dar $DF \parallel BE \Rightarrow BEDF$ paralelogram.

III. a) $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ACB$; $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ECA \Rightarrow$ [CA – bisectoare a $\sphericalangle ECB \Rightarrow CA \perp EB \Rightarrow DE \perp EB$.



b) Prelungim [AB] cu $[BE] \equiv [CD] \Rightarrow BDCE$ – paralelogram $\Rightarrow [CE] \equiv [BD] \Rightarrow AE = 2 \cdot MN$

De aici rezultă că $\triangle ACE$ este triunghiul căutat.



IV. a) $xy+yz+zx = xyz \; |: xyz \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1$.

Presupunem $x<y<z$. Arătăm că $x=2$.

Altfel, $x \ge 3 \Rightarrow y \ge 4$ și $z \ge 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$ fals.

$x = 2 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$.

Arătăm că $y = 3$. Altfel, $y \ge 4 \Rightarrow z \ge 5 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le$

$\le \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20} < \frac{1}{2}$ fals. $\Rightarrow y = 3$. De aici:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 6$.

b) Alegem $x = \frac{n}{n+1}$; $y = \frac{n+1}{n} \Rightarrow$

$1 + z\left(\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n}\right) = z \Rightarrow z\left(\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n} - 1\right) = -1$

$\Rightarrow z = -\frac{n^2+n}{n^2+n+1}$.

Clasa a VIII-a

I. a) $n = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9} = \frac{6}{27} > \frac{5}{27}$

$\frac{2}{9} = \frac{14}{63} < \frac{15}{63} = \frac{5}{21}$.

b) $\frac{3}{\sqrt{2}} : \frac{9}{\sqrt{8}} : (-8\sqrt{8}) \cdot 4\sqrt{2} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16\sqrt{2}} \cdot 4\sqrt{2} = -\frac{1}{6}$.

$\left[-\frac{1}{6}\right] = -1$.

c) $|3\sqrt{3} - x| + |y - 2,(2)| = 0 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$; $y = 2,(2)$

II. a) $OM \cap (A'B'C'D') = OM \cap A'C' = \{F\}$

$\Delta OCM \equiv \Delta FC'M \Rightarrow C'F = OC = 2\sqrt{2}$

b) MO' - linie mijlocie în $\Delta C'CA' \Rightarrow MO' \parallel A'C$

$MO' \subset (MB'D') \Rightarrow A'C \parallel (MB'D')$

c) Fie N - mijlocul lui BB'. Cum $D'M \parallel A'N$, $A'N \subset (ABB'A')$

$\Rightarrow D'M \parallel (ABB')$

III. a) $(x+y)^2 \ge (2\sqrt{xy})^2 \Rightarrow (x-y)^2 \ge 0$.

b) $xy = \frac{1}{z}$; $xz = \frac{1}{y}$; $z \cdot y = \frac{1}{x}$.

$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x}} + \sqrt{y^2 \cdot \frac{1}{y}} + \sqrt{z^2 \cdot \frac{1}{z}} \Rightarrow$

$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

c) $x^4 - x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + 2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - x + 1) +$

$+ 2(x^2 + x + 1) + 1 > 0 \Leftrightarrow$

$$x^2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+1>0.$$ A

IV. 1. $$\frac{\overline{ab}^2+2009}{\overline{ab}+1}=\frac{\overline{ab}^2+\overline{ab}-\overline{ab}-1+2010}{\overline{ab}+1}=$$

$$=\overline{ab}-1+\frac{2010}{\overline{ab}+1}$$

Dar $\overline{ab}\in\{10, 11, 12, \dots, 99\}$ ca număr de două cifre. Deci:

$\overline{ab}+1\in\{11, 12, \dots, 100\}$

Cum $2010=2\cdot3\cdot5\cdot67$, avem posibilitățile:

$\overline{ab}+1\in\{15; 30; 67\}$, sau: $\overline{ab}\in\{14; 29; 66\}$.

2. Numărul 6^n+2009 = (e de forma) = $3k+2$, iar orice pătrat perfect este de forma $3k$ sau $3k+1$.