Concursul Național de matematică “Arhimede”

Ediția a VI-a, etapa I – 15 noiembrie 2008

Clasa a III-a

I.(4p) a) Scrie toate numerele de 3 cifre cu suma cifrelor 8.Câte numere ai găsit?

(3p) b) Găsiți numerele impare egale cu răsturnatul lor, cu suma cifrelor 14.

(2p) c) Găsiți cel mai mare şi cel mai mic număr par de 3 cifre, care să aibă o cifră 5 şi diferența celorlalte două cifre să fie 6.

II.(3p) a) Suma unor numere consecutive este cuprinsă între 8 şi 13. Găsiți numerele.

(2p) b) i) Câte numere pare sunt de la 3 la 81?

(2p) ii) Câte perechi de numere pare cu suma cea mai mare se pot forma cu numere de la 3 la 81?

(2p) Care este suma acestor perechi?

III.(4p) a) Calculați :$2+4+6+\cdots+54-1-3-5-\cdots-53$

(5p) b) Am un număr, predecesorul său şi succesorul său.Adunând dublul numărului cu predecesorul său, obțin dublul succesorului. Aflați numărul, predecesorul şi succesorul.

IV.(2p) a) Împărțiți 56 de bile în 10 cutii astfel încât în fiecare cutie să fie cel puțin o bilă şi să nu fie acelaşi număr de bile în 2 cutii.

(7p) b) Doi frați împreună cu părinții lor au suma vârstelor 56 de ani. Cu 2 ani în urmă, suma vârstelor lor era de 49 de ani. Ştiind că diferența de vârstă dintre cei doi părinți este de 3 ani, ca şi diferența dintre cei doi frați, aflați câți ani are fiecare membru al familiei.

<u>Notă</u>: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 la 10 p. Fiecare subiect primeşte 1 punct din oficiu. Timp de lucru:2 ore.

Concursul Național de matematică “Arhimede”

Ediția a VI-a, etapa I – 15 noiembrie 2008

Clasa a IV-a

I. (3p) a) Un şir de 147 de cutii poştale a fost inscripționat cu numere consecutive. Cutia din mijloc poartă numărul 500.

Ce numere sunt inscripționate pe prima şi pe ultima cutie?

(2p) b) Descifrați misterul literelor: $ELIA + ELI + EL + E = 2008$

(4p) c) Calculați: $(7 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + \cdots + 7 \cdot 20) - 7 \cdot 1 - 7 \cdot 3 - \cdots - 7 \cdot 19$

II. 1. Fie şirul:
1; 2; 3; 6; 18; 2; 3; 4; 24; 96; 3; 4; ……

(2p) a) Completați şirul cu încă 2 termeni.
(3p) b) Aflați termenul de pe locul 30.

(4p)2. Câte cuvinte folosim pentru a scrie cu litere toate numerele naturale până la 101?

III. (4p)1.Suntem la curtea regelui Eduard în 5 iunie 1324 (5.6.1324 o dată în care niciuna dintre cifre nu se repetă)

Micul prinț Filip s-a născut la ultima dată ce a respectat această regulă. Câți ani va aniversa prințul în anul 1324?

(5p) 2. Determinați câtul unei împărțiri cu rest, dacă mărind deîmpărțitul cu 207 şi împărțitorul cu 9, câtul şi restul nu se schimbă.

IV. (4p) a) Un roboțel numerotează becurile de la o navă spațială cu numere de la 12 la 947 (astfel: 12, 13,…,947). Se defectează şi în loc de cifra 3 inscripționează cifra 5. Câte cifre de 5 apar scrise pe beculețele navei în total?

(5p) b) De Moş Nicolae 6 prieteni si-au împărțit unul altuia bomboane. Fiecare a oferit câte 50 de bomboane celorlalți şi s-a primit astfel: Horațiu şi Ioana au primit împreună cât a primit Lucia. Jeni şi Marius au primit împreună cât a primit George. George a primit câte bomboane a împărțit . Marius şi Horațiu au primit împreună cât a primit Ioana. Jeni a primit un număr de bomboane de 4 ori mai mic decât Marius.

Câte bomboane a primit fiecare?
<u>Notă</u>: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă se notează de la 1 la 10 p.
Fiecare subiect primeşte 1 punct din oficiu. Timp de lucru:2 ore.

Concursul Național de matematică “Arhimede”

Ediția a VI-a, etapa I – 15 noiembrie 2008

Clasa a IX-a

I.(9p) Fie ABC un triunghi dreptunghic cu unghiul drept în vârful A. Să se găsească toate punctele M de pe latura *[BC]* cu proprietatea $MA^2 = MB \cdot MC$.

I.V. Maftei, Cornel Berceanu

II.(3p) 1) Să se rezolve ecuația $2[x] = x + 1$

(3p) 2) Să se rezolve ecuația $\frac{2x-1}{2x-2} = 3x - \frac{1}{2}$

(3p) 3) Să se determine numerele reale a pentru care ecuația $[2x] = [x] + a$ are soluții şi în acest caz să se rezolve.

III. Să se demonstreze că dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ sunt adevărate următoarele afirmații:

(3p) 1) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz \geq \frac{1}{4}(x + y - 2z)^2$

(3p) 2) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

(3p) 3) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx + \frac{3}{2}min[(x - y)^2, (y - z)^2, (z - x)^2]$

Marius Drăgan

IV. (9p) Să se determine toate tripletele (a,b,c) cu următoarele proprietăți:

1) $a, b, c \in \{-1; 1\}$
2) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ ecuația $ax^2 + by^2 + cz^2 = n$ are soluții în mulțimea numerelor întregi.

Sorin Rădulescu, Mihai Piticari

Notă: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă se notează de la 1 la 10 p. Fiecare subiect primeşte 1 punct din oficiu. Timp de lucru:3 ore.

Concursul Național de matematică “Arhimede”

Ediția a VI-a, etapa I – 15 noiembrie 2008

Clasa a V-a

I. (3p) a) Împărțim numărul 20 la toate numerele naturale nenule mai mici decât el. Aflați suma câturilor obținute.

(3p) b) Determinați produsul numerelor naturale n, care verifică relația:

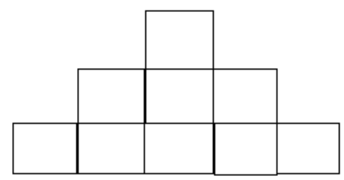
$$3 + 9 + 15 + 21 < n \leq 4 + 10 + 16 + 20$$

(3p) c) Calculați:

$$2008 \cdot 3^4 - 5^2 \cdot 2008 - 56 \cdot 2007$$

II. (5p) a) Fie $m = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 1000$ şi $n = 5 + 10 + 15 + \cdots + 500$. Să se afle restul împărțirii lui m la n.

(4p)b) Ionel construieşte din cuburi un zid ca în figura alăturată. Dacă la bază sunt 19 cuburi, iar în vârf un singur cub, aflați câte cuburi a folosit Ionel.



Cristina Godeanu

III. (4p)a) Împărțind numărul natural a la numărul natural b obținem câtul 25 şi restul 31. Să se afle numărul natural n astfel încât $n^6 = 24a - 600b - 15$.

Ion Burcă

(5p) b) Dacă împărțim numărul natural a la 6 obținem restul 5, iar dacă-l împărțim la 4 obținem restul 3. Să se arate că cel puțin unul dintre câturi este impar.

IV. (4p) a) Două persoane joacă urmatorul joc: pe o tablă se află numarul 1. La o primă mişcare se poate adăuga la numărul 1 orice număr de la 5 la 9. Jocul continua în acelaşi mod. Câştigă jucătorul care ajunge primul la 2008. Care din cei doi jucători câştigă?

N.M. Goşoniu

(5p) b) Să se arate că din n elevi, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ luați la întâmplare, participanți la concursul Arhimede, cel puțin doi au acelaşi număr de prieteni printre ceilalți.(Se presupune că dacă x este prieten cu y, atunci y este prieten cu z; presupunem de asemenea, că nimeni nu este prieten cu el însuşi)

Liviu Oprişescu

Notă: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă se notează de la 1 la 10 p. Fiecare subiect primeşte 1 punct din oficiu. Timp de lucru:2 ore şi 30 minute.

Concursul Național de matematică “Arhimede”

Ediția a VI-a, etapa I – 15 noiembrie 2008

Clasa a VI-a

I . Fie numerele: $a = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 2008 \cdot 2009$

$b = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2008^2$

(3p) a) Comparați a cu b

(3p) b) Calculați a-b

(3p) c) Aflați restul împărțirii lui b la 10.

(Cristian Olteanu)

II. Fie dreapta d şi punctele $A, B \in d, C \in (AB$ şi $D \in d$. Ştiind că $AC = 8{,}8cm$, $[BC] = [CD]$ şi $AD = 1{,}1cm$, determinați:

(4p) a) ordinea punctelor pe dreapta d;

(5p) b) lungimea segmentului $[DM]$, unde *M* este mijlocul lui $[AB]$.

Analizați toate cazurile posibile.

(Cristina Godeanu)

III.1) Fie $a = 30^n - 5^{n+1}$ şi $b = 6^{n+1} - 30$

(3p) a) Arătați că pentru orice număr natural $n > 1$, numerele a şi b nu sunt prime între ele.

(3p) b) Aflați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a - b = 589$

(Diana Niculescu)

(3p) 2) Fie $3 < a < b < c$, a, b, c numere prime cu proprietatea că $2b = a + c$. Să se arate că $6|b - a$ şi $6|c - b$.

(Liviu Oprişescu)

IV. Să se arate că oricum am aşeza numerele $1, 2, 3, \dots 20$ pe un cerc, găsim printre ele 5 consecutive (în ordinea de pe cerc) astfel încât suma lor să fie cel puțin 53?

(N.M. Goşoniu)

<u>Notă</u>: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă se notează de la 1 la 10 p. Fiecare subiect primeşte 1 punct din oficiu. Timp de lucru:2 ore şi 30 minute.

Concursul Național de matematică “Arhimede”

Ediția a VI-a, etapa I – 15 noiembrie 2008

Clasa a VII-a

I.(4p)a) Costul unui produs este 8,1 lei, iar T.V.A.-ul corespunzător este 0,9 lei. Producătorul oferă 25% din costul produsului pentru reclamă. Ce procent reprezintă reclama din prețul întreg al produsului? (Prețul întreg = costul+T.V.A.)

(Georgeta Alexandrescu)

(5p)b) Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $17a + 85b + 7c = 0$. Demonstrați că numărul $c(4a - b) \cdot (3a + 8b)$ este divizibil cu 833.

(Diana Niculescu- Rev.Arhimede,5-6/2004)

II.(3p) a) Comparați numerele *a* şi $\frac{1}{b}$, știind că :

$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2}{2^3} \cdot \frac{2^4}{2^5} \cdot \ldots \cdot \frac{2^{98}}{2^{99}}$

$b = (3^{1024} : 3^{512} : 3^{256} : \ldots : 3^2 : 3^1)^{50}$

(6p) b) Fie $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{12} + \frac{1}{35}$. Determinați a_{2009} şi $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}$.

III. Fie *ABC* un triunghi şi *M* un punct pe latura *[BC]*. Notăm cu *N* simetricul lui *M* față de latura *[AC]*. Ştiind că patrulaterele *ABMN* şi *AMCN* sunt romburi, se cere:

(4p) a) Aflați măsura unghiurilor triunghiului *ABC*.

(5p) b) Dacă P este punctul de intersecție al dreptelor *AB* şi *NC*, arătați că *AMNP* este romb.

(Marius Ghergu)

IV.(9p) Se consideră paralelogramele *ABCD* şi *A'B'C'D'*. Fie *M,N,P,Q* respectiv mijloacele segmentelor

[AA'],[BB'],[CC'],[DD']. Să se arate că *MNPQ* este paralelogram.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă se notează de la 1 la 10 p. Fiecare subiect primeşte 1 punct din oficiu. Timp de lucru:3 ore.

Concursul Național de matematică “Arhimede”

Ediția a VI-a, etapa I – 15 noiembrie 2008

Clasa a VIII-a

I.(4p) a) Arătați că $(2008^2+1)(2009^2+1)=(2008\cdot 2009-1)^2+(2008+2009)^2$

(5p) b) Arătați că numărul $m=\sqrt{6-\sqrt{35}}\left(\sqrt{14}-\sqrt{10}\right)\left(6+\sqrt{35}\right)$ este natural.

Ion Burcă

II.(4p) a) Arătați că numărul $A=2005^n+2008^n+2009^n$ nu este pătrat perfect, pentru nici o valoare a lui $n\in\mathbb{N}$.

Liviu Oprişescu

(5p) b) Determinați cel mai mare element din mulțimea $M=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|\sqrt{4^{27}+4^{1018}+4^x}\in\mathbb{Q}\right\}$

Liviu Oprişescu

III.(5p) a) Dintre toate paralelipipedele dreptunghice cu aceeaşi diagonală, aflați pe acela care are suma tuturor ariilor fețelor maximă.

Georgeta Alexandrescu

(4p) b) Fie *M*,*N*,*P* mijloacele a trei muchii ale unui cub de lungime *a* oricare două dintre aceste puncte negăsindu-se pe o aceeaşi față a cubului.

i)Determinați natura poligonului obținut prin intersecția planului *(MNP)* cu fețele cubului.

ii)Aflați aria poligonului astfel determinat.

***

IV. Fie $a,b,c,d\in(0,+\infty)$ numere reale. Arătați că :

(5p) 1) Dacă $a+b\geq\frac{a}{c}+bd$ atunci $a+b\leq ac+\frac{b}{d}$.

(4p) 2) Reciproca este adevărată?

Liviu Oprişescu

Notă: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă se notează de la 1 la 10 p. Fiecare subiect primeşte

1 punct din oficiu. Timp de lucru:3 ore.

Concursul Național de matematică “Arhimede”

Ediția a VI-a, etapa I – 15 noiembrie 2008

Clasa a X-a

I .Să se rezolve următoarele ecuații exponențiale:

(3p) 1) $2^x = 3^x + 1$

(6p) 2) $6^x + 20^x + 2 = 2^x + 3^x + 4^x + 5^x$

II. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to (0, \infty), g: (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{x^2-1}{2x}, x \in (0, \infty)$

(4p) 1) Să se calculeze $f \circ g$ şi $g \circ f$

(5p) 2) Să se demonstreze că funcțiile f şi g sunt bijective. Să se determine inversele lor.

III. Se consideră inecuația $\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} > \left(1+\sqrt{11}\right)^n$ cu $n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) 1) Să se demonstreze că *n=1* satisface inecuația de mai sus.

(5p) 2) Să se rezolve inecuația.

IV. (9p) Fie x un număr pozitiv cu următoarele proprietăți:

1) $x + \sqrt{x} \in \mathbb{Q}$
2) $x + \sqrt[3]{x} \in \mathbb{Q}$

Să se demonstreze că $\sqrt[6]{x} \in \mathbb{Q}$

Sorin Rădulescu

Notă: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă se notează de la 1 la 10 p. Fiecare subiect primeşte 1 punct din oficiu. Timp de lucru:3 ore.

Concursul Național de matematică “Arhimede”

Ediția a VI-a, etapa I – 15 noiembrie 2008

Clasa a XI-a

I. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale.

(3p) 1) Dacă $x_{n+1} = 2x_n$, $n \geq 1$ şi $x_1 = 1$ să se calculeze x_n , $n \geq 1$

(3p) 2) Dacă $y_{n+1} = 1 + 2y_n$, $n \geq 1$ şi $y_1 = 1$ să se calculeze y_n , $n \geq 1$

(3p) 3) Să se arate că şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt strict crescătoare.

II. Fie A o matrice pătrată 2×2 cu elemente numere complexe. Să se arate că:

(4p) 1) Dacă $A^2 = O_2$ atunci $tr(A) = 0$

(5p) 2) Dacă $A^2 - 2A + I_2 = O_2$ atunci pentru orice $n \geq 1$ avem $tr\,(A^n) = 2$

III. Se consideră şirul $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2}, n \geq 1$

(4p) 1) Să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

(5p) 2) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit.

Laurențiu Panaitopol, Maria Elena Panaitopol

IV.(9p) Fie *M* o mulțime nevidă de numere reale şi $f, g, h: M \to M$ funcții bijective cu proprietatea că $f + g = 2h$.

Să se arate că dacă *M* este mulțime finită atunci $f = g = h$.

Rămâne proprietatea de mai sus adevărată pentru $M = [0, 1]$?

Sorin Rădulescu

Notă: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă se notează de la 1 la 10 p. Fiecare subiect primeşte 1 punct din oficiu. Timp de lucru:3 ore.

Concursul Național de matematică “Arhimede”

Ediția a VI-a, etapa I – 15 noiembrie 2008

Clasa a XII-a

I. Să se calculeze integralele:

(4p) 1) $\int \frac{3\cos^2 x-1}{\cos x\cdot\cos 3x}\, dx\, , x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$

(5p) 2) $\int \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}dx\, , x\in\mathbb{R}$

I.V. Maftei

II. (3p) a) Să se determine toate numerele naturale $n\geq 2$ cu proprietatea că funcția $f:\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_n\, , f(x)=x^2$ este bijectivă.

(3p) b) Să se determine toate numerele naturale $n\geq 2$ cu proprietatea că $x^4\in\{\hat{0},\hat{1}\},\forall x\in\mathbb{Z}_n$

(3p) c) Fie $A\in M_n(\mathbb{Z})$ şi $m\in\mathbb{N}^*(m\geq 2)$ fixat. Dacă $\det A$ este prim cu m atunci există $k\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că matricea $B=A^k-I_n$ are elementele divizibile cu m.

Costel Chiteş

III. Fie A o submulțime nevidă de numere reale. Vom spune că A are proprietatea P_1 dacă oricare ar fi $x\in A$ avem $x^n\in A$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Vom spune că A are proprietatea P_2 dacă pentru orice $x,y\in A$ avem $x\cdot y\in A$.

(3p) 1) Să se determine toate intervalele cu cel puțin două puncte care sunt incluse în $(0,\infty)$, care au proprietatea P_1.

(2p) 2) Să se găsească toate mulțimile finite care au proprietatea P_1 .

(2p) 3) Să se găsească toate mulțimile finite care au proprietatea P_2 .

(2p) 4) Să se dea exemplu de mulțime A care are proprietatea P_1 dar nu are proprietatea P_2 .

IV. (9p) Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care admite primitive . Să notăm

$f^{(n)}=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n\, ori}$. Dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

1) $f^{(n)}$ este strict descrescătoare
2) $f^{(n)}$ este mărginită inferior
3) $\lim_{x\to-\infty} f^{(n)}(x)=\infty$

Atunci $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

Sorin Rădulescu

<u>Notă</u>: Toate problemele sunt obligatorii. Fiecare problemă se notează de la 1 la 10 p. Fiecare subiect primeşte 1 punct din oficiu. Timp de lucru:3 ore.