Concursul naţional de matematică

"LAURENŢIU PANAITOPOL"

Bucureşti, 07.11.2009

Clasa a VII-a

1. **a)** Calculaţi: $50^{50} \cdot 49^{49} \cdot 48^{48} \cdot ... \cdot 2^2 \cdot 1^1 + (-1)^1 \cdot (-2)^2 \cdot (-3)^3 \cdot ... \cdot (-49)^{49} \cdot (-50)^{50}$.

b) Determinaţi cel mai mare număr natural n care verifică egalitatea :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 100 = x \cdot 5^n,\ x \in \mathbb{N}.$$

2. **a)** Daţi exemplu de zece numere întregi diferite pentru care suma modulelor lor este egală cu 25.

b) Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Arătaţi că suma modulelor a $2n+2$ numere întregi diferite este cel puţin egală cu $(n+1)^2$.

3. **a)** Aflaţi câte numere naturale diferite, de câte patru cifre, se pot scrie folosind cifre din mulţimea $\{1; 2\}$.

b) Se dă numărul $P = 1001^{1001}$. Arătaţi că, oricum am alege nouă divizori naturali ai numărului P, există, printre aceştia, doi divizori al căror produs este pătrat perfect.

4. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle ADC) = 60^\circ$ şi $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ADB$. Dacă $AB = 4$ cm şi $DC = 7$ cm, determinaţi lungimea laturii $[AD]$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se punctează dela 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore efectiv.

Concursul naţional de matematică

“LAURENŢIU PANAITOPOL”

Bucureşti, 07.11.2009

Bareme şi soluţii

Clasa a VII-a

1. **a)** $(-1)^1\cdot(-2)^2\cdot(-3)^3\cdot\ldots\cdot(-49)^{49}\cdot(-50)^{50}=(-1)^{25}\cdot 1^1\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot 50^2$. **2 p**
Finalizare, rezultat 0. **2 p**

b) Sunt 16 factori care conţin pe 5^1 şi 4 factori care conţin pe 5^2. **2 p**
Finalizare: $n=24$. **1 p**

2. **a)** De exemplu: $-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5$. **3 p**
b) Suma minimă se obţine, de exemplu, pentru numerele $-n,\ldots,-1,0,1,\ldots,n,n+1$ şi este egală cu $2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)^2$. **3 p**
Dacă vom înlocui unul dintre cele $2n+2$ numere considerate cu un altul, acela va avea modulul mai mare decât $n+1$, deci suma modulelor va creşte. **1 p**

3. **a)** Fiecare dintre cele patru poziţii din scrierea unui număr poate fi ocupată de una dintre cifrele 1 sau 2. **1 p**
În total sunt $2^4=16$ numere. **2 p**
b) $1001=7\cdot 11\cdot 13$. **1 p**
Divizorii numărului 1001^{1001} sunt de forma $7^p\cdot 11^q\cdot 13^r$. **1 p**
Exponenţii puterilor pot fi numere pare sau impare, în total $2^3=8$ variante posibile. Considerând 9 divizori, una dintre variante se va repeta. **1 p**
Înmulţind numerele corespunzătoare, exponenţii factorilor produsului vor fi pari, deci acesta va fi pătrat perfect. **1 p**

4. Fie $\{E\}=AB\cap DC$.
Triunghiul ADE este echilateral. **2 p**
Triunghiurile ADB şi EAC sunt congruente (U.L.U.). **2 p**
Rezultă că $EC=AB=4$cm. **2 p**
Deci $AB=DE=DC+CE=11$cm. **1 p**