Concursul naţional de matematică

"LAURENŢIU PANAITOPOL"

Bucureşti, 07.11.2009

Clasa a VIII-a

1. **a)** Arătaţi că numărul $A=998\frac{99}{112}\cdot 997\frac{99}{112}-999\frac{99}{112}\cdot 996\frac{99}{112}$ este natural.

b) Ştiind că numerele reale pozitive *a* şi *b* verifică relaţia $\frac{4a-b}{a+2b}=\frac{1}{4}$, calculaţi valoarea raportului $\frac{a}{a+b}$.

2. Se consideră paralelogramul *ABCD* şi punctul *P* situat în afara planului său astfel încât $PC=BD$. Dacă punctul *Q* este mijlocul segmentului $[PA]$, arătaţi că:

a) dreapta *PC* este paralelă cu planul (QBD);

b) $m(\sphericalangle BQD)=90^\circ$.

3. În cercul $C(O;R)$ este înscris triunghiul dreptunghic isoscel *ABC*, $m(\sphericalangle A)=90^\circ$. Pe segmentul (OC) se consideră punctul *D* astfel încât $OD=x$. Dacă $BD=b$ şi $DC=a$, arătaţi că:

a) $R^2+x^2=\frac{a^2+b^2}{2}$ şi $R^2-x^2=ab$;

b) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\le a+b$.

4. Numerele raţionale pozitive *a, b, c,* verifică relaţia $a^2+b^2+2abc+ab=abc^2$.
Arătaţi că:

a) $c\ge 3$;

b) numărul $\sqrt{\frac{c-3}{c+1}}$ este raţional.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se punctează dela 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore efectiv.

Concursul naţional de matematică

"LAURENŢIU PANAITOPOL"

Bucureşti, 07.11.2009

Bareme şi soluţii. Clasa a VIII-a

1. **a)** Notăm, de exemplu, $a = 998\frac{99}{112}$ şi $b = 997\frac{99}{112}$

Avem : $ab-(a+1)(b-1) = ab-ab+a-b+1 = 2$. **3 p**

b) Relaţia din ipoteză este echivalentă cu $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$. **2 p**

Obţinem $\frac{a}{a+b} = \frac{2}{7}$. **2 p**

2. Fie $\{O\} = AC \cap BD$.

a) În triunghiul *ACD* segmentul $[OQ]$ este linie mijlocie.

Rezultă că $OQ \parallel DC$.

Cum $OQ \subset (QBD)$, rezută că $DC \parallel (QBD)$.

b) Deoarece $QO = \frac{1}{2} \cdot DC$, rezultă că $QO = \frac{1}{2} \cdot DB$.

În triunghiul *DBQ*, segmentul $[QO]$ este mediană.

Prin urmare, triunghiul *DBQ* este dreptunghic în *Q*.

3. **a)** $R = \frac{a+b}{2}$ şi $x = \frac{a+b}{2} - a = \frac{a-b}{2}$. **2 p**

Se verifică egalităţile din cerinţe. **2 p**

b) Relaţia se mai scrie $\sqrt{R^2+x^2} + \sqrt{R^2-x^2} \le 2R$. **1p**

Prin ridicare la pătrat se obţine inegalitatea echivalentă $\sqrt{R^4-x^4} \le R^2$ care este evidentă. **2 p**

4. **a)** Scăzând din ambii membri ai relaţiei din enunţ $3ab+2abc$, aceasta devine $(a-b)^2 = ab(c-3)(c+1)$. **2 p**

Rezultă că $c \ge 3$. **1 p**

b) Adunând în ambii membri ai relaţiei din enunţ $ab-2abc$, relaţia devine echivalentă cu $(a+b)^2 = ab(c-1)^2$. **1 p**

Obţinem $ab = \frac{(a+b)^2}{(c-1)^2}$, de unde $(c-3)(c+1) = (a-b)^2 \cdot \frac{(c-1)^2}{(a+b)^2}$. **2 p**

Deci $\frac{c-3}{c+1} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{(c-1)^2}{(c+1)^2}$. Rezultă concluzia. **1 p**