CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN-TRIDENT "
" MEMORIALUL MIRCEA GANGA "
Ediția a VII-a , Secțiunea A (M_1),
Brăila, 6 - 8.10. 2009

Clasa a VIII a

1 . Să se rezolve în $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ecuația:

$$2x\sqrt{4+\sqrt{15}}-2y\sqrt{4-\sqrt{15}}=5\sqrt{10}+9\sqrt{6}.$$

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat

2. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2+y^2-4x+6y+9=0$. Demonstrați că $x>y$ şi că

$$-1-2\sqrt{2}\le x+y\le -1+2\sqrt{2}$$

prelucrare după Vasile Scurtu, Bistrița Năsăud

3. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB\parallel CD$ şi $\{P\}=AC\cap BD.$

a) Să se arate că cercul $C(O_1,r_1)$ circumscris triunghiului $\triangle ABP$ şi $C(O_2,r_2)$ circumscris triunghiului DPC sunt cercuri tangente.

b)Dacă SP este tangenta comună a $C(O_1,r_1)$ şi $C(O_2,r_2)$ cu $S\in AD$ şi $AD\cap C(O_1,r_1)=\{A,E\}$, $AD\cap C(O_2,r_2)=\{D,F\}$ arătați că $SA\cdot SE=SD\cdot SF$.

Iulian Danielescu, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.

Concursul Interjudetean de Matematica “Petru Morasan – Trident”
“Memorialul Mircea Ganga” – Editia a VII-a

Clasa a VIII-a

Barem de corectare

Punctaj

Problema I Să se rezolve în $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ecuația:

$$2x\sqrt{4+\sqrt{15}}-2y\sqrt{4-\sqrt{15}}=5\sqrt{10}+9\sqrt{6}.$$

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat

Solutie

Vom prelucra, avantajos, radicalii care se găsesc in coeficienții lui x şi y:

$$\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}}=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{15}+3}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{2}}=\frac{|\sqrt{5}+\sqrt{3}|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

(2p)

$$\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{8-2\sqrt{15}}{2}}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{15}+3}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{2}}=\frac{|\sqrt{5}-\sqrt{3}|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

(2p)

Ecuația se scrie :

$$2\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot x-2\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot y=5\sqrt{10}+9\sqrt{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{10}+\sqrt{6})x-(\sqrt{10}-\sqrt{6})y=5\sqrt{10}+9\sqrt{6}\Leftrightarrow\sqrt{10}(x-y-5)=\sqrt{6}(9-x-y)$$

(2p)

Pentru a avea loc egalitatea, când x$\in\mathbb{Q}$ şi $y\in\mathbb{Q}$, trebuie ca x-y-5=0 şi 9-x-y=0

Astfel, avem sistemul: $\begin{cases}x+y=9\\x-y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=14\\x-y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=2\end{cases}$

$$\Rightarrow S=\{(x,y)\,|\,x=7,y=2\}\qquad\text{(1p)}$$

Problema **2.** Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $x^2+y^2-4x+6y+9=0$. Demonstrați că $x>y$ şi că

$$-1-2\sqrt{2}\le x+y\le -1+2\sqrt{2}$$

prelucrare după Vasile Scurtu, Bistrița Năsăud

Solutie

Relatia se scrie: $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ (1p) => $(x-2)^2\le 4$ si $(y+3)^2\le 4$

|x-2| si |y+3| (1p) (1p)

➔ $x \geq y$ (1p) Fie a=x+y ⇐=> y=a-x, inlocuiesc in relatie si obtinem

$2x^2-2(a+5)x+a^2+6a+9=0$

si $x \in \Re$ (2p)

(2p)

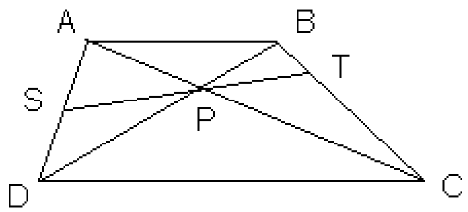
Problma **3.** Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ şi $\{P\} = AC \cap BD$.

a) Să se arate că cercul $C(O_1, r_1)$ circumscris triunghiului $\triangle ABP$ şi $C(O_2, r_2)$ circumscris triunghiului DPC sunt cercuri tangente.

b)Dacă SP este tangenta comună a $C(O_1, r_1)$ şi $C(O_2, r_2)$ cu $S \in AD$ şi $AD \cap C(O_1, r_1) = \{A, E\}$,
$AD \cap C(O_2, r_2) = \{D, F\}$ arătați că $SA \cdot SE = SD \cdot SF$.

Iulian Danielescu, Brăila

Solutie:



a) Fie ST tangenta in P si C(o1,r2)

$m \sphericalangle BAP = \frac{m\overset{\frown}{BP}}{2} = m \sphericalangle BPT = m \sphericalangle SPD$ 1.

$m \sphericalangle BAP = m \sphericalangle PCD$ (alterne interne) 2.

$m \sphericalangle PCD = \frac{m\overset{\frown}{PD}}{2}$ $SP^2 = SD \cdot SF$ 3.

Din 1 , 2 si 3 => $m \sphericalangle SPD = m\frac{\overset{\frown}{PD}}{2}$ => ST tangenta la C(o2,r2)

(4p)

b) Din $\triangle SAP \sim \triangle SPE$ => $\frac{SP}{SE} = \frac{SA}{SP}$ $SP^2 = SA \cdot SE$

Analog $SP^2 = SD \cdot SF$ (3p)