CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“ PETRU MOROŞAN-TRIDENT ”
“ MEMORIALUL MIRCEA GANGA ”
Ediția a VII-a , Secțiunea A (M_1),
Brăila, 6 - 8.11. 2009

Clasa a VII a

1. Să se afle numerele naturale x, y, z pentru care

$$7^x - 6\cdot 7^y - 8\cdot 7^z = 2009, \text{unde } x > y > z > 0.$$

Dumitru şi Rodica Bălan, Galați

2. Pentru x şi y numere naturale nenule definim numerele

$$a = \frac{3^{2009}\cdot x + 7^{2009}\cdot y}{10} \text{ şi } b = \frac{3^{2009}\cdot y + 7^{2009}\cdot x}{10}.$$

Arătați că a este număr natural dacă şi numai dacă b este număr natural.

Mihai Opincariu, Brad, Hunedoara
Supliment Gazeta Matematică nr.10/2009

3. Fie $\triangle ABC$ echilateral şi $M, N \in (AB)$ astfel încât $AM = MN = NB$ iar $P \in (AC)$ astfel încât $CP = AM$. Calculați $m(\measuredangle PMC) + m(\measuredangle PNC)$.

Ion Purcaru, Craiova

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.

Concursul Interjudetean de Matematica “Petru Morasan – Trident”
“Memorialul Mircea Ganga” – Editia a VII-a

Sectiunea B (M2) – Clasa a VII-a

Barem de corectare

Problema I Rezolvati in N ecuatia: $7^x - 6\cdot 7^y - 8\cdot 7^z = 2009$, x>y>z>0

Solutie

2009= $7^2 \cdot 41$ si cum z<x, z<y, ecuatia se scrie: $7^z(7^{x-z} - 6\cdot 7^{y-z} - 8) = 7^2 \cdot 41$
1p.

Daca z=1 => $7^{x-1} - 6\cdot 7^{y-1} - 8 = 287 \Leftrightarrow 7^{x-1} - 6\cdot 7^{y-1} = 295$
Sau y<x, deci y-1< x-1 => $7^{y-1}(7^{x-y} - 6) = 5\cdot 59$ **1p.**
Cum y>z si z=1=> y>1, deci y-1>0=> $7^{y-1} > 1$, $7^{y-1} = 5$ sau $7^{y-1} = 59$ sau $7^{y-1} = 295$, ecuatii care nu au solutii in N* **1p.**
Daca z=2, $7^{x-2} - 6\cdot 7^{y-2} - 8 = 41 \Leftrightarrow 7^{x-2} - 6\cdot 7^{y-2} = 49$
Cum y<x => y-2<x-2 => $7^{y-2}(7^{x-y} - 6) = 7^2$
Din y>z si z=2 => y>2 => $7^{y-2} > 1$ **1p.**

Se obtine $7^{y-2} = 7$ sau $7^{y-2} = 7^2$. Daca $7^{y-2} = 7 \Rightarrow y-2 = 1 \Leftrightarrow y = 3$ si atunci $7^{x-3} - 6 = 7 \Rightarrow 7^{x-3} = 13$, care nu are solutii in N
1p.
Daca $7^{y-2} = 7^2 \Rightarrow y-2 = 2 \Leftrightarrow y = 4 \Rightarrow 7^{x-4} - 6 = 1 \Leftrightarrow 7^{x-4} = 7 \Leftrightarrow x-4 = 1 \Leftrightarrow x = 5$
1p.
Daca $z \geq 3 \Rightarrow 7^z$ nu divide $7^2 \cdot 41 = 2009 \Rightarrow$ ecuatia nu are solutii => x=5, y=4, z=2 este solutia ecuatiei.
1p.

Problema II Pentru x şi y numere naturale nenule definim numerele

$$a = \frac{3^{2009}\cdot x + 7^{2009}\cdot y}{10} \text{ şi } b = \frac{3^{2009}\cdot y + 7^{2009}\cdot x}{10}.$$

Arătați că a este număr natural dacă şi numai dacă b este număr natural.

Mihai Opincariu, Brad, Hunedoara
Supliment Gazeta Matematică nr.10/2009

Solutie

Concursul Interjudetean de Matematica “Petru Morasan – Trident”
“Memorialul Mircea Ganga” – Editia a VII-a

a= $a=\dfrac{3^{2009}x+7^{2009}y}{10}$; $b=\dfrac{3^{2009}y+7^{2009}x}{10}$; x,y$\in\mathbb{N}^*$;Dem a$\in\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$b$\in\mathbb{N}^*$;

Solutie:

“=>” a$\in\mathbb{N}$ =>10 | 3^{2009}x+7^{2009}y (1p)

10 | (3^{2009}+7^{2009})y + (7^{2009}+3^{2009})x (1p)

Deoarece $3^{2009}+7^{2009}$=(3+7)(3^{2008}-3^{2007}7+…+7^{2008})=M_{10}

=>10 | 3^{2009}y + 7^{2009} x => b$\in\mathbb{N}$ (1p)

(1p)

$\Leftrightarrow$b$\in\mathbb{N}$ => 10 | 3^{2009}y + 7^{2009} x (1p)

10 | (3^{2009} + 7^{2009})y + (7^{2009}+3^{2009})x (1p)

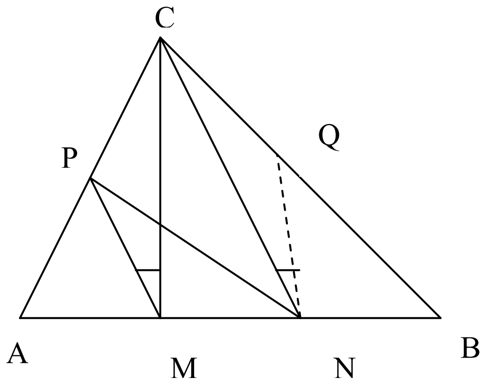
=>10 | 3^{2009} x+7^{2009} y => 10 | a=>a$\in\mathbb{N}$ (1p)

Problema III**.** Fie $\triangle ABC$ echilateral şi $M, N\in(AB)$ astfel încât $AM=MN=NB$ iar $P\in(AC)$ astfel încât $CP=AM$. Calculați $m(\measuredangle PMC)+m(\measuredangle PNC)$.

Ion Purcaru, Craiova

Solutie

Subiectul 3



Solutie: $AP=AN, \sphericalangle A=60^\circ \Rightarrow \triangle PAN$ echilateral (1p)

PM mediana$\Rightarrow$PM $\perp$ AB (1p)

$m(\widehat{ANP})=60^\circ$ (1p)

Fie Q$\in$ (BC) a.i.CQ=CP $\Rightarrow$ $m(\widehat{PMC})=m(\widehat{QNC})$

($\triangle PMC\equiv\triangle QNC$) (2p)

$m(\widehat{PMC})+m(\widehat{PNC})=m(\widehat{PNQ})=m(\widehat{QNA})-m(\widehat{ANP})=90^\circ-60^\circ=30^\circ$ (2p)