



ROMÂNIA

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Str. General Berthelot nr. 26, sector 1, București, 010168,
Tel.: +40-21-3144411; 3144511; 3144424. Tel/fax: +40-21-3103207

Evaluarea la disciplina *Matematică* în cadrul examenului național de bacalaureat 2010

Examenul național de bacalaureat este modalitatea esențială de evaluare a competențelor, a nivelului de cultură generală și de specializare atins de absolvenții de liceu.

În conformitate cu *Ordonanța de urgență nr. 97/2009, pentru modificarea Legii Învățământului nr. 84/1995 și cu Art.41 (1) din Anexa 2 la O.M.E.C.I. nr.5507/06.10.2009, privind aprobarea calendarului și a metodologiei de organizare și desfășurare a examenului de bacalaureat -2010*, se susține o probă scrisă de evaluare a competențelor formate pe durata învățământului liceal, la disciplina matematică în cadrul probei **E - c)**, diferențiată în funcție de filieră, profil și specializare.

În consecință, susțin proba scrisă la disciplina *matematică* elevii care au absolvit liceul în cadrul profilului real din filiera teoretică, în cadrul tuturor profilurilor din filiera tehnologică și în cadrul profilului pedagogic, specializarea învățător-educatoare și a profilului militar, din filiera vocațională. Proba scrisă la *matematică* are statut de disciplină obligatorie.

Testul elaborat în cadrul probei scrise la matematică contribuie la îndeplinirea funcțiilor evaluării urmărite prin examenul de bacalaureat. Prin el se realizează o evaluare sumativă la finalul învățământului preuniversitar. Fiecare test proiectat asigură o cuprindere echilibrată a materiei studiate, are un grad de complexitate corespunzător conținutului programelor școlare și a programei de bacalaureat, putând fi tratat în timpul stabilit de 3 ore.

Testul pentru proba scrisă la disciplina *matematică* este format din trei subiecte. Fiecare subiect conține câte șase itemi subiectivi de tip rezolvare de probleme.

Competențe de evaluat

Proba scrisă la disciplina *matematică*, susținută în cadrul examenului de bacalaureat 2010, evaluează competențele dezvoltate pe parcursul învățământului liceal, în conformitate cu programele școlare pentru clasele a IX-a - a XII-a, în vigoare pentru absolvenții promoției 2010.

Competențele generale și competențe specifice asociate conținuturilor programei de bacalaureat care urmează a fi evaluate în cadrul probei scrise la *matematică*:

1. Identificarea unor date și relații matematice și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite

- Utilizarea proprietăților algebrice ale numerelor, a estimărilor și aproximărilor în contexte variate
- Recunoașterea unor corespondențe care sunt șiruri, progresii, funcții
- Identificarea valorilor unei funcții folosind reprezentarea grafică
- Descrierea sintetică sau vectorială a proprietăților unor configurații geometrice
- Identificarea unor metode posibile în rezolvarea problemelor
- Interpretarea primară a datelor statistice sau probabilistice cu ajutorul calculului financiar, a graficelor și a diagramelor

2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice

- Utilizarea unor metode algebrice și grafice pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor de ecuații
- Completarea unor tabele de valori necesare pentru trasarea graficului
- Aplicarea unor metode diverse pentru optimizarea calculelor de distanțe, unghiuri și arii
- Identificarea, într-o situație-problemă dată, a formulei adecvate de numărare
- Utilizarea unor algoritmi specifici calculului financiar, statisticii sau probabilităților pentru analiza de caz
- Identificarea unor metode de calcul ale integralelor, prin realizarea de legături cu reguli de derivare
- Interpretarea unor proprietăți ale șirurilor și ale altor funcții cu ajutorul reprezentărilor grafice
- Evidențierea asemănărilor și a deosebirilor dintre proprietățile unor operații definite pe mulțimi diferite și dintre calculul polinomial și cel cu numere

3. Utilizarea algoritmilor și a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete

- Alegerea formei de reprezentare a unui număr real și utilizarea de algoritmi pentru optimizarea calcului cu numere
- Transpunerea în limbaj matematic prin mijloace statistice sau probabilistice a unor probleme practice
- Operarea cu funcții reprezentate în diferite moduri și caracterizarea calitativă a acestor reprezentări
- Utilizarea unor formule combinatoriale în raționamente de tip inductiv
- Utilizarea operațiilor cu vectori pentru a descrie o problemă practică
- Aplicarea algoritmilor de calcul în situații practice

4. Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete și a algoritmilor de prelucrare a acestora

- Caracterizarea unor mulțimi de numere și a unor relații dintre acestea utilizând limbajul logicii matematice și teoria mulțimilor
- Exprimarea proprietăților unei funcții prin condiții algebrice sau geometrice
- Exprimarea prin reprezentări grafice a unor condiții algebrice; exprimarea prin condiții algebrice a unor reprezentări grafice
- Exprimarea analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configurații geometrice
- Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții
- Analiza unor configurații geometrice pentru optimizarea algoritmilor de rezolvare
- Analiza și interpretarea unor situații practice cu ajutorul conceptelor statistice sau probabilistice
- Utilizarea proprietăților operațiilor în calcule specifice unei structuri algebrice

5. Analiza și interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situații-problemă

- Analiza unor contexte uzuale și matematice (de exemplu: redactarea soluției unei probleme) utilizând limbajul logicii matematice și teoria mulțimilor
- Analiza unor situații practice și descrierea lor cu ajutorul funcțiilor

- Interpretarea unor situații problemă cu conținut practic cu ajutorul funcțiilor și a elementelor de combinatorică
- Stabilirea unor condiții de existență și/sau de compatibilitate a unor sisteme și identificarea unor metode adecvate de rezolvare a acestora
- Folosirea proprietăților unei funcții continue, pentru calcularea integralei acesteia pe un interval

6. Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoștințelor din diferite domenii

- Transpunerea unei situații-problemă în limbaj matematic, rezolvarea problemei și interpretarea rezultatului
- Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări grafice prin utilizarea de estimări, aproximări și strategii de optimizare
- Optimizarea calculului trigonometric prin alegerea adecvată a formulelor
- Modelarea unor configurații geometrice analitic, sintetic sau vectorial
- Optimizarea rezolvării unor probleme sau situații problemă prin alegerea unor strategii și metode adecvate (de tip algebric, vectorial, analitic, sintetic)
- Explorarea unor proprietăți cu caracter local și/ sau global ale unor funcții utilizând continuitatea, derivabilitatea sau reprezentarea grafică

Testele și baremele corespunzătoare, elaborate în vederea asigurării transparenței și informării persoanelor interesate, sunt prezentate ca modele pentru examenul propriu-zis:

Precizări referitoare la evaluarea probei scrise

Ponderea diferitelor comportamente cognitive în evaluarea competențelor elevilor prin proba scrisă la examenul de bacalaureat 2010, disciplina *matematică*, este ilustrată în tabelul de mai jos:

Competență Tip de comportament	Cunoștințe, abilități/ deprinderi, atitudini				
	Cunoaștere	Înțelegere	Aplicare	Analiză – Sintează	Evaluare
Comportamente cognitive					
Pondere	10%	15%	50%	15%	10%

Cunoașterea conceptelor, proprietăților, teoremelor, formulelor, algoritmilor, problematicii specifice disciplinei *matematică* se evaluează prin sarcini de lucru precum: **enumerați, precizați/menționați, specificați, caracterizați, determinați, arătați etc.**

Înțelegerea conceptelor, proprietăților, teoremelor, formulelor, algoritmilor, problematicii specifice disciplinei *matematică* se evaluează prin sarcini de lucru precum: **recunoașteți, exemplificați, precizați, identificați, specificați, evidențiați, scrieți, descrieți, calculați, explicați, verificați etc.**

Aplicarea conceptelor, proprietăților, teoremelor, formulelor, algoritmilor, modalităților de operare și de abordare specifice disciplinei *matematică* în contexte noi și în rezolvarea de probleme, se evaluează prin sarcini de lucru precum: **calculați/efecuați, alegeți, exprimați, estimați, transpuneți, construiți/completați un grafic/un tabel, trasați, utilizați, justificați, rezolvați, demonstrați, redactați, prelucrați, interpretați etc.**

Analiza - Sinteza conceptelor, proprietăților, teoremelor, formulelor, algoritmilor, modalităților de operare și de abordare specifice disciplinei *matematică* în contexte noi și în rezolvarea de probleme, se evaluează prin sarcini de lucru precum: **organizați, aranjați, optimizați, corelați, măsurați, calculați/efecțuați, comparați, asociați, formulați, reprezentați grafic, caracterizați, compuneți, prelucrați, elaborați, deduceți, proiectați, analizați, argumentați/justificați etc.**

Evaluarea conceptelor, proprietăților, teoremelor, formulelor, algoritmilor, modalităților de operare și de abordare specifice disciplinei *matematică* în contexte noi și în rezolvarea de probleme, se evaluează prin sarcini de lucru precum: **estimați, selectați, alegeți, comparați, ierarhizați, stabiliți, studiați, argumentați, judecați, transferați etc.**

Competențele de evaluat, înscrise în programele pentru examenul de bacalaureat 2010 la *matematică* sunt urmărite, în cadrul probei scrise, având în vedere raportul dintre competență și comportamentele cognitive corespunzătoare, conform prezentării anterioare.

Baremul de evaluare și de notare este instrumentul pe baza căruia se apreciază lucrările elevilor. Este un instrument de evaluare și de notare asociat unei/unor sarcini concrete de lucru date elevilor.

Baremul de evaluare și de notare este elaborat cu grad înalt de obiectivitate și aplicabilitate, astfel încât să reducă la minim diferențele de notare dintre corectori.

Baremul de evaluare și de notare este proiectat pe baza notării analitice. Aceasta implică determinarea principalelor performanțe (unități de răspuns) pe care elevul trebuie să le evidențieze în răspunsul său la fiecare item. Unităților de răspuns li se acordă puncte care, însumate, determină nota pentru fiecare item. Notarea analitică are avantajul de a asigura rigurozitatea corectării, favorizând realizarea unei aprecieri obiective.

Baremul de evaluare și de notare, în cazul itemilor de tip rezolvare de probleme, include elemente ale răspunsului care vor fi punctate. În acest fel candidatul primește punctaj pentru rezolvări parțiale ale cerinței itemului. Pentru o evaluare unitară, în barem se vor regăsi rezolvări complete ale itemilor. Se vor puncta însă corespunzător oricare alte metode de rezolvare corectă a problemei.

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică – informatică

MODEL

- Toate subiectele (I, II și III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.
- Minden feladat (I, II és III) kötelező. Megjelenés 10 pont.
- Munkaidő 3 óra.
- Minden feladat teljes megoldását írd a vizsgalapra!

I. FELADAT

(30 pont)

- 5p 1. Határozd meg a $(\sqrt{3} + i)^6$ komplex szám valós részét.
- 5p 2. Adott az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ függvény. Számítsd ki: $(f \circ f)(512)$.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $\cos 2x + \sin x = 0$ egyenletet.
- 5p 4. Adott az $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz. Határozd meg az olyan (a, b, c) számhármassok számát, amelyek esetén $a, b, c \in M$ és $a < b < c$.
- 5p 5. Számítsd ki az $x + 2y = 6$ és $2x + 4y = 11$ egyenletű párhuzamos egyenesek közötti távolságot.
- 5p 6. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB = 1$, $BC = 2$ és $m(\widehat{BAD}) = 60^\circ$. Számítsd ki az $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ skaláris szorzatot.

II. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az
$$\begin{cases} ax + by + cz = b \\ cx + ay + bz = a \\ bx + cy + az = c \end{cases}$$
 egyenletrendszer, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.
- 5p a) Mutasd ki, hogy az egyenletrendszer determinánsa $\Delta = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.
- 5p b) Oldd meg az egyenletrendszert összeférhető határozott esetben.
- 5p c) Tudva, hogy $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$, mutasd ki, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok olyan (x, y, z) megoldása van, amelyre $x^2 + y^2 = z - 1$.
2. Adott a $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ halmaz.
- 5p a) Határozd meg a G halmaz elemeinek számát.
- 5p b) Adj példát olyan $A \in G$ mátrixra, amelyre $\det A \neq \hat{0}$ és $\det A^2 = \hat{0}$.
- 5p c) Határozd meg az $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X \in G$ egyenlet megoldásainak a számát.

III. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ függvény.
- 5p a) Határozd meg az f függvény $+\infty$ -be tartó aszimptótájának egyenletét.
- 5p b) Számítsd ki az $f'(x)$ -et, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- 5p c) Igazold, hogy az f függvény konkáv a $(-\infty, -1)$ intervallumon.
2. Adottak az $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = |\sin nx|$, $n \in \mathbb{N}^*$ függvények és az $I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x} dx$ számok.
- 5p a) Számítsd ki: $\int_0^{\pi} f_2(x) dx$.
- 5p b) Igazold, hogy $I_n \leq \ln 2$.
- 5p c) Igazold, hogy $I_n \geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$.

Examenul de bacalaureat 2010

Proba E - c)

Proba scrisă la matematică

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

MODEL

- Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.
- Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$	2p
	$z^6 = 2^6 \cdot \left(\cos \frac{6\pi}{6} + i \sin \frac{6\pi}{6} \right) = -2^6 \Rightarrow \operatorname{Re} z^6 = -64$	3p
2.	$f(512) = \frac{1}{8}$	2p
	$(f \circ f)(512) = f\left(\frac{1}{8}\right) = 2$	3p
3.	Ecuția devine $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, cu soluțiile $\sin x = -\frac{1}{2}$ și $\sin x = 1$.	3p
	Obținem $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sau $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.	2p
4.	Numărul cerut este egal cu numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii M	3p
	Acesta este $C_6^3 = 20$.	2p
5.	Punctul $A(0, 3)$ se află pe prima dreaptă.	2p
	Distanța este $d(A, d_2) = \frac{ 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 - 11 }{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$.	3p
6.	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2$	3p
	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 1$	1p
	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 + 2^2 = 5$	1p

SUBIECTUL al II - lea

(30 de puncte)

1.a)	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$	2p
------	---	----

	$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$, de unde rezultă concluzia	3p
b)	Observăm că $x=0, y=1, z=0$ verifică sistemul. Cum soluția este unică, aceasta este soluția căutată.	3p 2p
c)	$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (c-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a=b=c$. Sistemul are o infinitate de soluții de forma $x=\alpha, y=\beta, z=1-\alpha-\beta$. Putem lua $\beta = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1-4\alpha^2-4\alpha})$, cu $4\alpha^2 + 4\alpha - 1 \leq 0$.	2p 2p 1p
2.a)	a, b, c pot lua fiecare 4 valori Avem $4^3 = 64$ matrice.	3p 2p
b)	Luăm $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ $\det(A) = \hat{2}, \det(A^2) = \hat{0}$	3p 2p
c)	$X = \begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ \hat{0} & c^2 \end{pmatrix}$ Ecuația devine $a^2 = \hat{1}, b(a+c) = \hat{0}, c^2 = \hat{0}$. Obținem $a \in \{\hat{1}, \hat{3}\}, c \in \{\hat{0}, \hat{2}\}, b = \hat{0}$, deci există 4 soluții	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III - lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow m = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0$, deci avem asimptota oblică $y = x$.	2p 3p
b)	$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2 + x + 1)}{(x+1)^2}$ $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$	3p 2p
c)	$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ $f''(x) < 0, \forall x \in (-\infty, -1)$, deci f este concavă pe $(-\infty, -1)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^\pi \sin 2x dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx - \int_{\pi/2}^\pi \sin 2x dx$ $I = \left. \frac{-\cos 2x}{2} \right _0^{\pi/2} + \left. \frac{\cos 2x}{2} \right _{\pi/2}^\pi$ $I = 2$	2p 2p 1p
b)	$I_n = \int_\pi^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x} dx \leq \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{x} dx$ $\int_\pi^{2\pi} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big _\pi^{2\pi} = \ln 2$	3p 2p
c)	$I_n = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{ \sin t }{t} dt$	1p

	$I_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{ \sin t }{t} dt + \int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi} \frac{ \sin t }{t} dt + \dots + \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi} \frac{ \sin t }{t} dt$	2p
	$I_n \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \sin t dt + \frac{1}{\pi(n+2)} \int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi} \sin t dt + \dots + \frac{1}{2n\pi} \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi} \sin t dt$	1p
	Din $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin t dt = 2, \forall k \in \mathbb{Z}$ rezultă concluzia.	1p

Examenul de bacalaureat 2010

Proba E - c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

MODEL

- Toate subiectele (I, II și III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.
- Minden feladat (I, II és III) kötelező. Megjelenés 10 pont.
- Munkaidő 3 óra.
- Minden feladat teljes megoldását írd a vizsgalapról!

I. FELADAT

(30 pont)

- 5p 1. Az $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani haladványban $a_1 = 3$ és $a_3 = 7$. Számítsd ki a haladvány első 10 tagjának az összegét.
- 5p 2. Határozd meg azokat az m valós számokat, amelyekre az $A(m, -1)$ pont rajta van az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$ függvény grafikus képén.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $\log_5(2x + 3) = 2$ egyenletet.
- 5p 4. Határozd meg egy 5 elemes halmaz 3 elemes részhalmazainak a számát.
- 5p 5. Az xOy koordináta rendszerben adottak az $A(-1, -2)$, $B(1, 2)$ és $C(2, -1)$ pontok. Számítsd ki a C pont távolságát az AB szakasz középpontjától.
- 5p 6. Az ABC háromszögben $AB = 8$, $AC = 8$ és $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$. Számítsd ki az ABC háromszög területét.

II. FELADAT

(30 pont)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok és az $f: M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2 - 3X + I_3$ függvény, ahol $X^2 = X \cdot X$.
- 5p a) Számítsd ki: $\det(I_3 + B)$.
- 5p b) Igazold, hogy $f(A) = I_3 + B$.
- 5p c) Mutasd ki, hogy $(f(A))^3 = I_3 + 3B + 3B^2$, ahol $(f(A))^3 = f(A) \cdot f(A) \cdot f(A)$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = x + y - 3$ és $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$ műveleteket.
- 5p a) Oldd meg az egész számok halmazán az $x \circ x = x * x$ egyenletet.
- 5p b) Határozd meg azt az a egész számot, amelyre $x \circ a = 3$, bármely x egész szám esetén.
- 5p c) Oldd meg az $\begin{cases} x * (y + 1) = 4 \\ (x - y) \circ 1 = 5 \end{cases}$ egyenletrendszert, ahol $x, y \in \mathbb{Z}$.

III. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ függvény.
- 5p a) Számítsd ki: $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.
- 5p b) Számítsd ki: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- 5p c) Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait.
2. Adott az $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$ függvény.
- 5p a) Számítsd ki az f függvény grafikonjának az Ox tengely körüli forgatásával kapott test térfogatát.
- 5p b) Számítsd ki: $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p c) Számítsd ki: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$.

Examenul de bacalaureat 2010

Proba E - c)

Proba scrisă la matematică

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

MODEL

- Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.
- Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$ $a_{10} = 21$ $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 120$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
2.	$A(m, -1) \in G_f \Leftrightarrow f(m) = -1 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 = -1$ $m = 2 \text{ sau } m = 1$	<p>3p</p> <p>2p</p>
3.	$2x + 3 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ $2x + 3 = 25 \Rightarrow x = 11 \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$	<p>1p</p> <p>4p</p>
4.	$C_5^3 =$ $= 10$	<p>3p</p> <p>2p</p>
5.	<p>Fie M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow M(0, 0)$</p> <p>Scrierea formulei distanței dintre 2 puncte</p> $CM = \sqrt{5}$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
6.	$\text{Aria } \triangle ABC = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} =$ $= \frac{8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 16$	<p>2p</p> <p>3p</p>

SUBIECTUL al II - lea

(30 de puncte)

1.a)	$I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(I_3 + B) = 1$	<p>2p</p> <p>3p</p>
------	---	---------------------

b)	$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	2p
	$f(A) = A^2 - 3A + I_3 =$	1p
	$= I_3 + B$	2p
c)	$(f(A))^3 = (I_3 + B)^3 = I_3 + 3B + 3B^2 + B^3$	2p
	$B^3 = O_3$	2p
	Finalizare	1p
2.a)	$(x-3)^2 - 2(x-3) = 0$	2p
	$(x-3)(x-5) = 0$	1p
	$x = 3$ sau $x = 5$	2p
b)	$(x-3)(a-3) + 3 = 3$	2p
	$a = 3 \in \mathbf{Z}$	3p
c)	$\begin{cases} x + y = 6 \\ (x - y - 3)(-2) = 2 \end{cases}$	3p
	$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$	2p

SUBIECTUL al III - lea

(30 de puncte)

1.a)	$(x^3)' = 3x^2$	2p
	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	2p
	Finalizare	1p
b)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$	3p
	$f'(1) = 0$	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$	1p
	Din tabelul de variație rezultă f crescătoare pe $(-\infty, -1]$ și pe $[1; +\infty)$	2p
	și f descrescătoare pe $[-1; 0)$ și pe $(0; 1]$	2p
2.a)	$V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 x^2 (2 - x^2) dx =$	1p
	$= \pi \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big _0^1 =$	2p
	$= \frac{7\pi}{15}.$	2p
b)	$\int_0^1 x \sqrt{2 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_2^1 \sqrt{t} dt =$	3p

	$= \frac{t\sqrt{t}}{3} \Big _1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$	2p
c)	$\int_0^x f(t) dt = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}{3}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}{3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2-x^2}}{3} \cdot (-2x)}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	<p>3p</p> <p>2p</p>

Examenul de bacalaureat 2010

Proba E - c)

Proba scrisă la matematică

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător- educatoare

MODEL

- Toate subiectele (I, II și III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.
- Minden feladat (I, II és III) kötelező. Megjelenés 10 pont.
- Munkaidő 3 óra.
- Minden feladat teljes megoldását írd a vizsgalapra!

I. FELADAT

(30 pont)

- 5p 1. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy a $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ halmaz egy tetszőleges eleme megoldása legyen az $x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletnek.
- 5p 2. Számítsd ki az $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 40$ összeget.
- 5p 3. Határozd meg az m valós paraméter értékeit úgy, hogy az $x^2 - 4mx + 1 = 0$ egyenletnek legyenek valós megoldásai.
- 5p 4. Számítsd ki az $A(1, 2)$ pont távolságát a $d: x + y + 1 = 0$ egyenestől.
- 5p 5. Oldd meg \mathbb{R} -ben a $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$ egyenletet.
- 5p 6. Számítsd ki: $\frac{1}{2} \cos 135^\circ + 3 \sin 135^\circ$.

II. FELADAT

(30 pont)

- Az egész számok halmazán értelmezzük az $x * y = xy + 2x + 2y + a$, $a \in \mathbb{Z}$ műveletet.
- 5p a) Határozd meg az $a \in \mathbb{Z}$ értékét, ha létezik semleges elem a "*" műveletre nézve.
- 5p b) Igazold, hogy $a = 2$ esetén a "*" művelet asszociatív.
- 5p c) Ha $a = 2$, mutasd ki, hogy $(x + y + 2) * z = (x * z) + (y * z) + 2$, bármely $x, y, z \in \mathbb{Z}$ esetén.
- 5p d) Ha $a = 2$ határozd meg az $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{létezik } x' \in \mathbb{Z} \text{ úgy, hogy } x * x' = -1\}$ halmazt.
- 5p e) Ha $a = 2$ határozd meg az $x, y \in \mathbb{Z}$ számokat úgy, hogy $x * y = 3$ legyen.
- 5p f) Adott a $H = \{-3, -1\}$ halmaz. Határozd meg az $a \in \mathbb{Z}$ értékét úgy, hogy bármely $x, y \in H$ esetén $x * y \in H$ legyen.

III. FELADAT

(30 pont)

Adottak az a, b, c valós számok és a $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ determináns.

- 5p** a) Ha $a = 1$, $b = 2$ és $c = 3$ számítsd ki a D determinánst.
- 5p** b) Igazold, hogy ha $a = b$, akkor $D = 0$.
- 5p** c) Ha $b = 2$ és $c = 3$, határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ értékét, úgy, hogy $D = 2$ legyen.
- 5p** d) Igazold, hogy $D = (b - a) \cdot (c - a) \cdot (c - b)$.
- 5p** e) Igazold, hogy ha $D = 0$, akkor az a , b és c számok közül legalább kettő egyenlő.
- 5p** f) Mutasd ki, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{Z}$, akkor D páros egész szám.

Examenul de bacalaureat 2010

Proba E - c)

Proba scrisă la matematică

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător- educatoare

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

MODEL

- Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.
- Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1)	$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$ Finalizare: $P = \frac{2}{5}$	2p 3p
2)	$1 + 2 + 3 + \dots + 40 = \frac{40 \cdot 41}{2} = 820$	3p 2p
3)	$\Delta = 16m^2 - 4$ $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$	2p 3p
4)	Scrierea formulei $d(A, d) = \frac{ 1+2+1 }{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$	3p 2p
5)	$7^x = y; y^2 - 8y + 7 = 0$ $y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ $y_2 = 7 \Rightarrow x_2 = 1$	1p 2p 2p
6)	$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ; \sin 135^\circ = \sin 45^\circ$ Finalizare: $\frac{1}{2}\cos 135^\circ + 3\sin 135^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{4}$	2p 3p

SUBIECTUL al II - lea

(30 de puncte)

a)	Din definiția elementului neutru și cum legea este comutativă, avem $x * e = x, \forall x \in \mathbf{Z}$ $(e + 2)x + 2e + a = x, \forall x \in \mathbf{Z}$ de unde $\begin{cases} e + 2 = 1 \\ 2e + a = 0 \end{cases}$ Deci $a = 2$ și $e = -1$.	1p 2p 2p
b)	$(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in \mathbf{Z}$ $(x * y) * z = xyz + 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 6$ $x * (y * z) = xyz + 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 6$	1p 2p 2p
c)	$x * y = (x + 2)(y + 2) - 2 \Rightarrow (x + y + 2) * z = (x + y + 4)(z + 2) - 2$	2p

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

	$(x * z) + (y * z) + 2 = (x + 2)(z + 2) - 2 + (y + 2)(z + 2) - 2 + 2 =$ $= (x + y + 4)(z + 2) - 2 = (x + y + 2) * z$	2p 1p
d)	Din $x * x' = (x + 2)(x' + 2) - 2 = -1$, rezultă $x' = -2 + \frac{1}{x + 2} \in \mathbf{Z}$ pentru $x \in \mathbf{Z}$ $(x + 2) 1$, adică $(x + 2) \in \{-1, 1\}$ $M = \{-3, -1\}$	2p 2p 1p
e)	Din $x * y = 3$ se obține $(x + 2)(y + 2) = 5$ Finalizare: $(x; y) \in \{(-1; 3), (-3; -7), (3, -1), (-7; -3)\}$	1p 4p
f)	$(-3) * (-3) = a - 3 = (-1) * (-1) \in \{-3, -1\} \Rightarrow a \in \{0, 2\}$ $(-3) * (-1) = (-1) * (-3) = a - 5 \in \{-3, -1\} \Rightarrow a \in \{2, 4\}$ $a = 2$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III - lea

(30 de puncte)

a)	$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ Finalizare: $D = 2$	2p 3p
b)	$a = b \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ Finalizare: $D = 0$	2p 3p
c)	$D = a^2 - 5a + 6$ $D = 2 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$ $a = 1$ sau $a = 4$	2p 1p 2p
d)	Scăzând prima linie din celelalte două obținem $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b - a & b^2 - a^2 \\ 0 & c - a & c^2 - a^2 \end{vmatrix}$ $D = (b - a)(c - a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b + a \\ 0 & 1 & c + a \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$	2p 3p
e)	$D = (b - a)(c - a)(c - b) = 0 \Rightarrow b - a = 0$ sau $c - a = 0$ sau $c - b = 0$ Finalizare	3p 2p
f)	Dintre cele 3 numere întregi a, b, c , cel puțin două au aceeași paritate, deci diferența lor este număr par. Dar cum $D = (b - a)(c - a)(c - b)$ rezultă că D este număr par	3p 2p