PROBLEME CU RADICALI

Problema 1: *Să se arate că expresia* $E=\frac{2a-b}{a+2b}$ *este raţională ştiind că* $a=\sqrt{3-\sqrt{5}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$ *şi* $b=\sqrt{\sqrt{7}-1-\sqrt{11-4\sqrt{7}}}$.

(E:9383, G.M. 3/1988, Constantin Apostol)

Problema 2: *Arătaţi că numerele* $\frac{1+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$, $\frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ *şi* $\frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{6}+10\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{10}}$ *nu sînt întregi.*

(E:10010, G.M. 6-7/1990, Ion Bursuc)

Problema 3: *Să se arate că:* $2^{\sqrt{2}}<7$.

(A200, G.M. 2/1994, Lucian Tuţescu)

Problema 4: *Să se determine numărul* $\overline{abc}$ *ştiind că* $\sqrt{\overline{abc}}+\sqrt{\overline{cba}}=\overline{xx}$.

(E:11254, G.M. 10/1996, Valer Pop)

Problema 5: *Dacă* $a=\sqrt{17-2\sqrt{30}}-\sqrt{17+2\sqrt{30}}$, *să se calculeze* $\left(a+2\sqrt{2}\right)^{1997}$.

(E: 11435, G.M. 9/1997, Petrică Ciungu)

Problema 6: *Fie numerele:* $a=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}+\sqrt{\sqrt{3}+1}\right)$ *şi* $b=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}-\sqrt{\sqrt{3}+1}\right)$. *Calculaţi a+b.*

(E:12175, G.M. 5-6/2001, Ion Safta)

Problema 6: *Dacă a,b sunt cifre în baza zece, demonstraţi că* $\sqrt{\overline{2ab4}}+\sqrt{\overline{5a1b6}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

(E:12602, G.M. 9/2003, Romeo Zamfir)

Problema 7: *Să se determine numerele reale* $a,b\geq 0$ *astfel încât:*
$\sqrt{(3-a)(2-b)}+\sqrt{(3a+b)(5-2a)}=5$.

(E:12641, G.M.11/2003, Florin Cârjan)

Problema 8: *Determinați cifrele a,b şi numărul* $n\in\mathbb{N}$*, ştiind că:* $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}\sqrt{n}}=n+a\sqrt{n}$*.*

(E:12656, G.M.12/2003, Romanța Ghiță şi Ioan Ghiță)

Problema 9: *Dacă* $n\in\mathbb{N}$*, demonstrați că* $\sqrt{2n^2+2n+3}$ *este irațional.*

(E:12696, G.M. 2/2004, Niculae Grigorescu)

Problema 10: *Dacă* $\sqrt{0,a(bc)+0,b(ca)+0,c(ab)}\in\mathbb{Q}$*, calculați a+b+c.*

(E:12716, G.M. 3/2004, Aurel Sasu)

Problema 11: *Fie* $E_n=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+...+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}},n\in\mathbb{N}$*. Care este valoarea de adevăr a propoziției* $E_{1994}\in\mathbb{N}$?

(OLM Covasna, 1994)

Problema 12: *Calculați:* $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{1992\sqrt{1991}+1991\sqrt{1992}}$.

(OLM Argeş, 1992)

Problema 13: *Să se calculeze suma:*

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+...+\frac{1}{\sqrt{99\cdot 100}\left(\sqrt{100}+\sqrt{99}\right)}.$$

(OLM Bistrița-Năsăud, Szanto Elisabeta)

Problema 14: *Fie*

$$E=\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{\left(99-\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(100-\sqrt{2}\right)^2}}\right)$$

$$:\frac{99}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(100-\sqrt{2}\right)}.$$

Arătați că $E\in\mathbb{Z}$*.*

(OLM Botoşani, 1991)

Problema 15: *Fie numerele:* $A=\frac{2a+\sqrt{3}+1}{a\sqrt{3}-a+1}, a\in\mathbb{R}, a\neq\frac{-1}{\sqrt{3}-1};$ $B=\frac{2b+\sqrt{3}-1}{b\sqrt{3}+b+1}, b\in\mathbb{R}, b\neq\frac{-1}{\sqrt{3}-1}.$ *. a) Să se arate că* $A=\sqrt{3}+1$. *b) Să se afle media aritmetică şi media geometrică a numerelor A şi B.*

(OJM Alba, 1990)

Problema 16: *Determinați valorile lui* $x\in\mathbb{Z}$ *pentru care numărul:*
$E=\frac{\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{18+8\sqrt{2}}}{x-2}$ *este întreg.*

(OJM Timiş, 1993)

Problema 17: *Arătați că* $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{1935}+\sqrt{1936}}\in\mathbb{N}.$

(OLM Bacău, 1993)

Problema 18: *Comparați numerele:*
$a=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)....\left(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}\right)\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\right)$
$b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)....\left(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}\right)\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}\right)$
, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

(OJM Ialomița)

Problema 19: *Determinați* $x\in\mathbb{Z}$ *pentru care:* $\sqrt{x^2+17x+60}\in\mathbb{N}$.

(OLM Galați, 1994)

Problema 20: *Fie* $n\in\mathbb{N}$. *Există* $a,b\in\mathbb{N}$ *astfel încât* $\sqrt{n+1}=\frac{a\sqrt{n}+b\sqrt{n+2}}{a+b}$ *?*

(OJM Hunedoara, 1993, Matei Truşcă)

Problema 21: *Determinați numerele prime a şi b şi numărul întreg c, ştiind că ele verifică egalitatea* $3\sqrt{a}+5\sqrt{b}=c\sqrt{2}$ *.*

(OLM Bucureşti, 1992, Mircea Fianu)

Problema 22: *Dacă a,b,c sunt numere raționale strict pozitive şi* $\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$, *atunci* $\sqrt{a}$ *şi* $\sqrt{c}$ *sunt numere raționale.*

Problema 23: *Fie* $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$ *şi* $x,y\in\mathbb{Q}$. *Arătați că:*
1) $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ *dacă şi numai dacă* $x=y=0$ *.*
2) dacă $\frac{a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c}{b\sqrt{3}+c\sqrt{2}+d}\in\mathbb{Q}$, *atunci* $a+d\geq b+c$ *şi* $a^2+b^2-c^2-d^2$ *este divizibil cu a+b+c+d.*

(ONM Arad, 1994, Ştefan Smarandache)

Problema 24: *Demonstrați că numărul* $\sqrt{n^{2007}-n^{2005}+2006}$ *este irațional, oricare ar fi* $n\in\mathbb{N}$.

(OJM Dâmbovița, 2006, Marinescu Damian)

Problema 25: *Determinați numărul natural nenul de trei cifre* $\overline{abc}$, *scris în baza zece, ştiind că este pătrat perfect şi* $\sqrt{\overline{abc}+1320\sqrt{\overline{abc}}}=\overline{abc}$.

(OLM Galați, 2006, Rodica şi Dumitru Bălan)

Problema 26: *Să se arate că pentru orice număr natural* $n, n>1$, *numărul* $\sqrt{11...144...4}$, *unde 1 apare de n ori, iar 4 apare de 2n ori este irațional.*

(OJM 2006, Cecilia Diaconescu)

Problema 27: *Fie triungihul ABC, unde AB=c, AC=b, BC=a. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ştiind că este verificată relația:*
$\sqrt{a-4\sqrt{3}a+21}+\sqrt{b^2-2\sqrt{3}b+28}+\sqrt{c^2-6c+25}\leq 12$.

(Concursul „Gheorghe Lazăr, 2006)

Problema 28: *Determinați cifrele x,y,z,t ştiind că:* $\sqrt{\overline{xxyzt}}=\overline{xx}+\overline{yzt}$.

(Concursul „Nicolae Păun", 2006)

Problema 29: *Determinați* $k\in\mathbb{Z}$ *astfel încât* $\sqrt{k^2-1999k}\in\mathbb{N}$.

(Concursul „Micul Arhimede", 2006)

Problema 30: *Se consideră numerele:* $a=\frac{1+3}{1+2}\cdot\frac{1+3+5}{1+2+3}\cdot\frac{1+3+5+7}{1+2+3+4}\cdot...\cdot\frac{1+3+5+...+1021}{1+2+3+...+511}$
şi $b=10^{2006}-2005$.
a) Arătați că $\sqrt{a}\in\mathbb{N}$.
b) Demonstrați că $\sqrt{b}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

(Concursul „Revistei Arhimede",2006, Traian Preda)

Problema 31: *Rezolvați în* $\mathbb{R}$, *ecuația:* $\sqrt{-x^2+2x+15}+\sqrt{y^2+2y+1}=4$.

(Concursul „Ion Ciolac", 2006, Nicolae Talău şi Ion Rotaru)

Problema 32: *Arătați că:* $\sqrt{35n^2+42n+10}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q},\forall n\in\mathbb{Q}$.

(Concursul „Memorialul Al. Cojocaru, 2006)

Problema 33: *Să se arate că numărul* $\sqrt{\underbrace{44...4}_{4012 cifre}-\underbrace{88...8}_{2006 cifre}}$ *este natural.*

(Concursul „Mathematica-Modus Vivendi",2006)

Problema 34: *Aflați cel mai mic număr natural nenul b, astfel încât* $\sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$*, unde* $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 14$.

(Concursul „Grigore Moisil", 2006)

Problema 35: *Arătați că numărul* $\sqrt{n^2 + 7n + 11}$ *este irațional,* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Problema 36: *Aflați cifrele x,y astfel încât:* $\sqrt{0,xx(y) + 0,yy(x)} \in \mathbb{Q}$.

(Concursul „Euclid", proba pe echipaje, 2006)

Problema 39: *a) Fie x şi y numere raționale pozitive. Să se arate că:* $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \geq x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$

b) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$*, are loc inegalitatea:*

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + 1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{4} + 3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

(OLM Harghita, 2007)

Problema 40: *Fie* $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$*. Arătați că* $\frac{\sqrt{a}}{b+c} = \frac{\sqrt{b}}{a+c} = \frac{\sqrt{c}}{a+b}$ *dacă şi numai dacă a=b=c.*

(OLM Hunedoara, 2007)